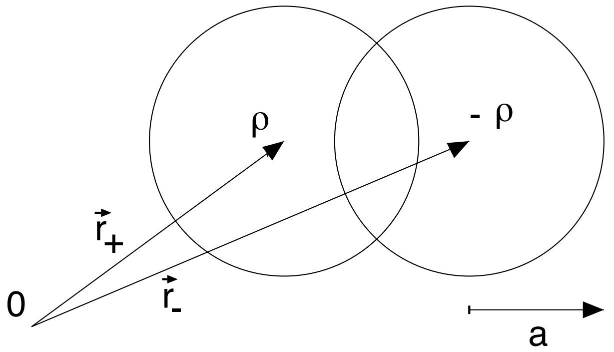
TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 18 JANUARI 1995, 9–12 UUR.

1. *(a)* Bereken het elektrische veld binnen en buiten een homogeen geladen bol (straal a, ladingsdichtheid ρ binnen de bol).
   (b) Bereken de elektrostatische potentiaal binnen en buiten de bol. Kies het referentiepunt zó, dat de potentiaal nul is in het middelpunt van de bol.
   (c) Twee homogeen geladen bollen, elk met straal a en tegengestelde ladingsdichtheden $+\rho$ en $-\rho$, overlappen elkaar gedeeltelijk. Het middelpunt van de positieve bol ligt op $\vec{r}_+$, dat van de negatieve bol op $\vec{r}_-$ (zie figuur). Bewijs dat het elektrische veld in het gebied waar de bollen elkaar overlappen constant is en bereken die constante.



2. De arbeid dW/dt per tijdseenheid die de elektromagnetische velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ verrichten op een ladingsverdeling ρ en stroomverdeling $\vec{j}$ is gegeven door

$$\frac{dW}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \vec{E} \cdot \vec{j}.$$

   (a) Waarom bevat deze vergelijking niet het magnetische veld?
   (b) Pas deze vergelijking toe op een stroomkring (stroom I, zelfinductiecoëfficient L). Leid af dat

$$\frac{dW}{dt} = -LI\frac{dI}{dt}.$$

   (c) De stroom I wordt langzaam vergroot van I_1 tot I_2. Bereken de verandering in de magnetische energie van de spoel. Is het een afname of een toename?

3. In een metaal (geleidingsvermogen σ) geldt de wet van Ohm: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.
(a) Leid af dat de ladingsverdeling $\rho(\vec{r}, t)$ in het metaal voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho.$$

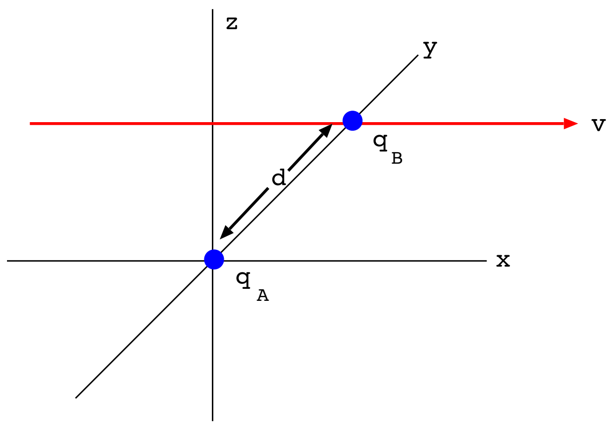
(De dielektrische constante en magnetische permeabiliteit in het metaal stellen we gelijk aan die van vacuum, nl. ε_0 en μ_0.) Laat zien dat $\rho \to 0$ voor $t \to \infty$.
(b) We veronderstellen nu $\rho = 0$ in het metaal. Leid af dat het elektrische veld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ voldoet aan de vergelijking

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

(c) We zoeken een oplossing in de vorm van een vlakke golf,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{y} \, \mathrm{Re} \left[E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - \omega t)} \right].$$

Bereken de dispersierelatie, d.w.z. de relatie tussen golfgetal k en frequentie ω. Geef aan hoe de indringdiepte van het elektrische veld in het metaal afhangt van σ in het geval dat $\sigma \ll \varepsilon_0 \omega$.



4. Lading q_A is in rust in de oorsprong in inertiaalstelsel S. Lading q_B beweegt met snelheid v in de x-richting langs de lijn $y = d$, $z = 0$ (zie figuur). We beschouwen het moment dat q_B de y-as kruist.
(a) Wat is de elektromagnetische kracht $\vec{F}_B$ op q_B in stelsel S.
(b) Bereken de getransformeerde kracht $\vec{F}'_B$ in stelsel S' waarin q_B in rust is.
(c) Bereken ook de kracht $\vec{F}'_A$ op q_A in stelsel S'. Wat impliceert Uw antwoord voor de derde wet van Newton (actie = −reactie)?

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 28 APRIL 1995, 9–12 UUR.

1. Het cylindersymmetrische tijdsafhankelijke magnetische veld $\vec{B}$ wordt gegeven door

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \begin{cases} B_0\hat{z}\cos\omega t & \text{als } x^2+y^2<a^2, \\ 0 & \text{als } x^2+y^2>a^2. \end{cases}$$

(a) Bereken het bijbehorende elektrische veld $\vec{E}$.
(b) Bereken de bijbehorende stroom- en ladingsdichtheden.
(c) Bereken de arbeid die het elektromagnetische veld verricht gedurende een periode $T = 2\pi/\omega$.

2. Een elektromagnetisch veld *in vacuum* wordt beschreven door de potentialen $V = 0$, $\vec{A} = A_0\hat{y}\sin(kx-\omega t)$.
(a) Bereken de bijbehorende velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$.
(b) Bereken de relatie tussen het golfgetal k en de frequentie ω.
(c) Is het mogelijk om een ijktransformatie te vinden zodanig dat de vectorpotentiaal overal gelijk wordt aan nul? Zo neen, waarom niet; Zo ja, wat is dan die transformatie.

3. In een metaal (geleidingsvermogen σ) geldt de wet van Ohm: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.
(a) Leid af dat de ladingsverdeling $\rho(\vec{r},t)$ in het metaal voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho.$$

(De dielektrische constante en magnetische permeabiliteit in het metaal stellen we gelijk aan die van vacuum, nl. ε_0 en μ_0.) Laat zien dat $\rho \to 0$ voor $t \to \infty$.
(b) We veronderstellen nu $\rho = 0$ in het metaal. Leid af dat het elektrische veld $\vec{E}(\vec{r},t)$ voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\vec{r}^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

(c) We zoeken een oplossing in de vorm van een vlakke golf,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\left[E_0 e^{i(kx-\omega t)}\right].$$

Bereken de dispersierelatie, d.w.z. de relatie tussen golfgetal k en frequentie ω. Geef aan hoe de indringdiepte van het elektrische veld in het metaal afhangt van σ in het geval dat $\sigma \ll \varepsilon_0\omega$.

4. *(a)* Hoe transformeren de potentialen $V(\vec{r},t)$ en $\vec{A}(\vec{r},t)$ bij verandering van inertiaalstelsel S naar S'?
(b) Gegeven is dat de potentialen in S voldoen aan de Lorentzijk,

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}.$$

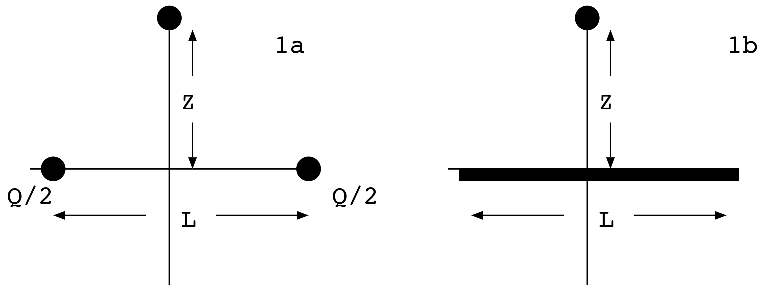
Waarom voldoen de potentialen in S' dan ook aan de Lorentzijk?
(c) In de Lorentzijk gelden de golfvergelijkingen

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \vec{r}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j},$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vec{r}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho,$$

waarbij $\vec{j}(\vec{r}, t)$ en $\rho(\vec{r}, t)$ de stroom- en ladingsdichtheden zijn. Waarom zijn deze golfvergelijkingen invariant onder Lorentztransformaties?

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 21 AUGUSTUS 1995, 9–12 UUR.

1. *(a)* Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ (grootte en richting) op een afstand z boven het midden tussen twee gelijke puntladingen $\frac{1}{2}Q$. De afstand tussen de ladingen is L. (Zie figuur 1a.)
   (b) Bereken $\vec{E}$ op een afstand z boven het midden van een draad van lengte L, die uniform geladen is met totale lading Q. (Zie figuur 1b.)
   (c) Wat wordt $\vec{E}$ uit opgave b als $z \gg L$?



   Wellicht zijn de volgende integralen nuttig om te weten:

$$\begin{aligned}
\int (1+x^2)^{-3/2} dx &= x(1+x^2)^{-1/2} \\
\int x(1+x^2)^{-3/2} dx &= -(1+x^2)^{-1/2}, \\
\int x(1+x^2)^{-1/2} dx &= (1+x^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

2. *(a)* Gegeven is de vectorpotentiaal $\vec{A} = A_0(\vec{r} \times \hat{z})$, waarbij A_0 een constante is en $\hat{z}$ een eenheidsvector in de z-richting. Bereken het bijbehorende magnetische veld.
   (b) Construeer een ijktransformatie van $\vec{A}$ naar $\vec{A}' = (2A_0 y, 0, 0)$.
   (c) Hoe verandert de scalaire potentiaal Φ door deze transformatie?
   (d) Stel dat A_0 niet constant is, maar van de tijd afhangt volgens $A_0 = a_0 \cos \omega t$. Wat is dan het magnetische veld?

3. *(a)* Geef de Liénard-Wiechert potentialen $\Phi(\vec{r}, t)$ en $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen. Geef expliciet aan waar de geretardeerde tijd voorkomt in Uw formules. Geef ook de definitie van de geretardeerde tijd.
   (b) Een puntlading beweegt met constante snelheid v naar rechts langs de x-as. Bereken de potentialen op de x-as rechts van de lading.

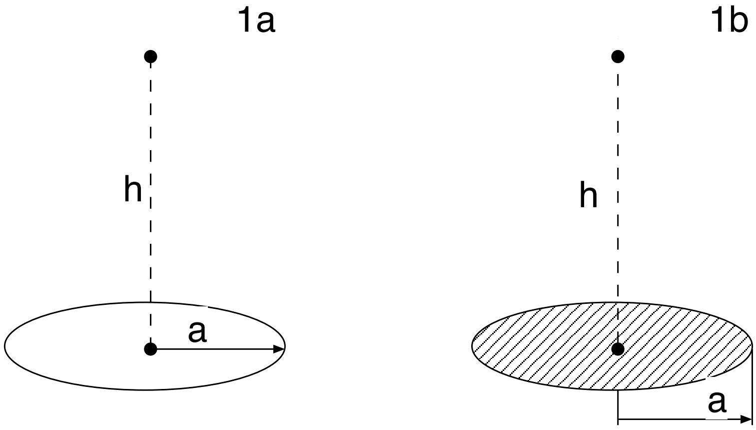
4. Het inertiaalstelsel S' beweegt ten opzichte van inertiaalstelsel S met een snelheid v in de x-richting.
   (a) Leid uit de Lorentztransformatie van ruimte en tijd de relatie af tussen de partiële afgeleiden
   $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ in stelsel S en $\frac{\partial}{\partial t'}, \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}$ in stelsel S'.
   (b) Neem als uitgangspunt dat de Maxwellvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial x} E_y(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial y} E_x(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} B_z(\vec{r}, t)$$

invariant is onder Lorentztransformatie. Leid hieruit af bepaalde transformatieregels voor de elektrische en magnetische velden.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 19 JANUARI 1996, 9–12 UUR.

1. *(a)* Een cirkelvormige *draad* (straal a) is uniform geladen (totale lading Q). Bereken het elektrische veld op een afstand h boven het middelpunt. (Zie figuur 1a.)
   (b) Een cirkelvormige *schijf* (straal a) is uniform geladen (totale lading Q). Bereken het elektrische veld op een afstand h boven het middelpunt. (Zie figuur 1b.)



   (c) De cirkelvormige schijf van opgave 1b wordt vervormd tot een elliptische schijf (de korte as van de ellips is a, de lange as is b). Wat wordt het elektrische veld voor $h \gg b$?

2. In de magnetostatica gelden tussen de vectorpotentiaal $\vec{A}$, het magnetische veld $\vec{B}$ en de stroomdichtheid $\vec{j}$ de relaties

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{A} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}, \\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}. \end{aligned}$$

   (a) Als $\vec{j}$ bekend is (en $\vec{j} \to 0$ voor $r \to \infty$), kan $\vec{B}$ gevonden worden met behulp van de formule van Biot en Savart. Schrijf deze formule nauwkeurig op.
   (b) Als $\vec{B}$ bekend is (en $\vec{B} \to 0$ voor $r \to \infty$), kan $\vec{A}$ gevonden worden met behulp van de formule

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{B}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, d\vec{r}\,'. \tag{1}$$

   Leid deze formule af.
   (c) Als $\vec{B}$ constant is over de hele ruimte, kan vergelijking (1) niet gebruikt worden. Laat zien dat in dat geval geldt dat $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$.

3. In de elektrodynamica geldt de inhomogene golfvergelijking

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}$$

   voor de vectorpotentiaal $\vec{A}$ in de Lorentzijk.
   (a) Geef de algemene oplossing en leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.

We beschouwen nu het geval van een oneindig lange draad langs de z-as, waarin een constante stroom I_0 op tijdstip $t = 0$ abrupt wordt aangezet. Dat wil zeggen, de stroom $I(t)$ door de draad voldoet aan

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{voor } t < 0, \\ I_0 & \text{voor } t > 0. \end{cases}$$

(b) Op een afstand R van de draad geldt dat $\vec{A} = 0$ voor $t < T$ en $\vec{A} \neq 0$ voor $t > T$. Bereken T.
(c) Bereken $\vec{A}$ voor $t > T$. Gegeven is de integraal

$$\int (a^2 + x^2)^{-1/2}\, dx = \ln[(a^2 + x^2)^{1/2} + x].$$

(d) Wat is het magnetische veld $\vec{B}$ op een afstand R van de draad in de limiet $t \to \infty$?

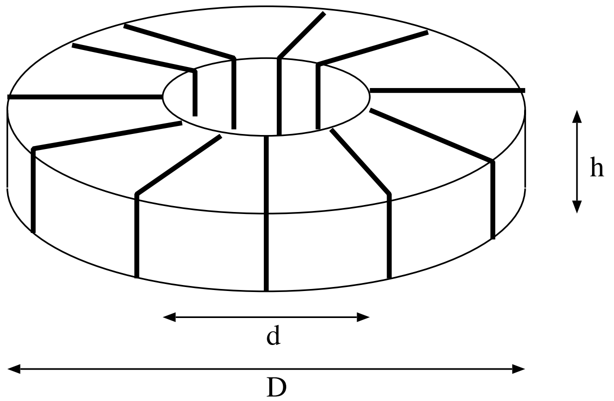
4. De ladingsdichtheid maal de lichtsnelheid $c\rho$ en de stroomdichtheid $\vec{j}$ vormen samen een viervector.
(a) Wat houdt deze bewering in?
(b) Waarom is deze bewering waar?
(c) Laat zien dat de wet van behoud van lading,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j},$$

relativistisch invariant is.

Tentamen Elektromagnetisme II, 11 maart 1996, 9–12 uur.

1. *(a)* In de magnetostatica geldt $\Delta\vec{B} = -\mu_0 \nabla \times \vec{j}$. Leid deze relatie tussen magnetisch veld en stroomdichtheid af uit de Maxwellvergelijkingen.
   (b) Een stroomverdeling heeft *toroïdale symmetrie* als geldt dat j_R en j_z onafhankelijk zijn van ϕ en bovendien $j_\phi = 0$. (De coördinaten R, z, ϕ zijn cylindercoördinaten.)
   Laat zien dat voor het magnetisch veld dat door zo'n stroomverdeling wordt opgewekt geldt dat $B_R = 0$ en $B_z = 0$. (U mag veronderstellen dat $B \to 0$ in het oneindige.)



   (c) Een spoel bestaat uit een schijf met een gat waarom een stroomdraad gewonden is. (Zie figuur.) Het aantal windingen van de draad is N, de stroom door de draad is I, de buitendiameter van de schijf is D, de binnendiameter d, de hoogte h. De stroomverdeling heeft in goede benadering de toroïdale symmetrie. Bereken op elk punt het magnetisch veld. Waar is het 't grootst?

2. *(a)* Leid uit de Maxwellvergelijkingen af dat ladings- en stroomdichtheid voldoen aan

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}.$$

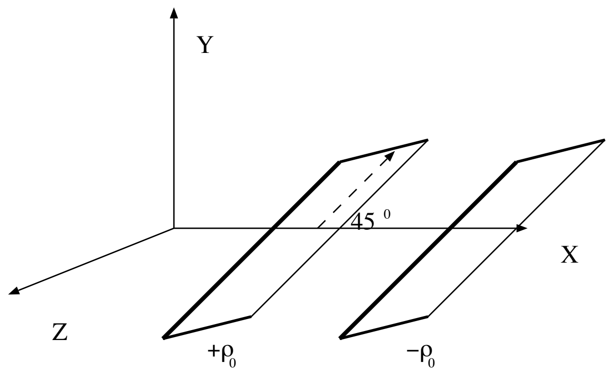
   Leid uit deze vergelijking de wet van behoud van lading af.
   (b) De stelling van Poynting is een formule voor de arbeid W die door elektrische en magnetische velden op een volume V wordt uitgeoefend. Schrijf die stelling op en leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen. Leid uit de stelling van Poynting de wet van behoud van energie af.
   (c) Het uitproduct $\vec{E} \times \vec{B}$ van elektrisch en magnetisch veld speelt een rol in de wet van behoud van impuls. Welke rol?

3. Beschouw in vacuum een lineair gepolariseerde, monochromatische, vlakke elektromagnetische golf, gegeven door

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \hat{y} E_0 \cos(kx - \omega t), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \hat{z} B_0 \cos(kx - \omega t). \end{aligned}$$

   (a) Welke relatie leggen de Maxwellvergelijkingen op tussen E_0 en B_0? Welke relatie tussen k en ω?
   (b) Bereken de tijdsgemiddelde energiedichtheid opgeslagen in het elektromagnetische veld. Bereken ook de tijdsgemiddelde impulsdichtheid.

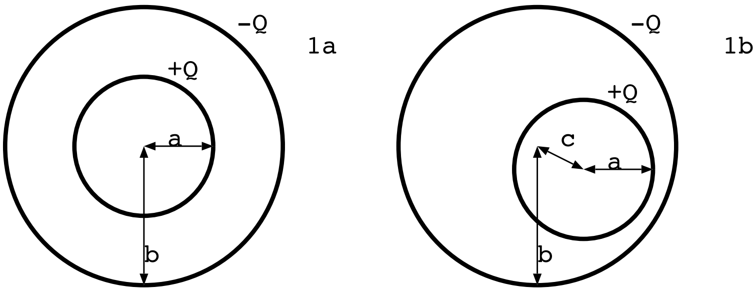
(c) De golf valt loodrecht op een absorberend scherm, met oppervlak A. Bereken de tijdsgemiddelde kracht die de golf op het scherm uitoefent.



4. Een condensator bestaat uit twee oneindige, vlakke, evenwijdige platen die in het ruststelsel S een hoek van 45° met de x-as maken. (Zie figuur.) In stelsel S hebben de platen een dikte d_0 en een ladingsdichtheid $\pm\rho_0$. Het inertiaalstelsel S' beweegt ten opzichte van S met snelheid v_R in de positieve x-richting.
(a) Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ en het magnetische veld $\vec{B}$ in het stelsel S. Bereken vervolgens de velden $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ in het stelsel S'.
(b) Bereken de ladingsdichtheid op de platen in stelsel S'.
(c) Welke hoek maken de platen met de x'-as in stelsel S'? Hoe staat $\vec{E}'$ gericht ten opzichte van de platen in stelsel S' als v_R de lichtsnelheid nadert?

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 19 AUGUSTUS 1996, 9–12 UUR.

1. Beschouw twee concentrische bolvormige metalen schillen (straal a en b, zie figuur 1a). Vanuit het oneindige breng ik een lading $+Q$ op de binnenste schil en een lading $-Q$ op de buitenste.
(a) Bereken het potentiaalverschil tussen de schillen.
(b) Hoeveel arbeid heb ik verricht?



Stel nu dat de schillen niet concentrisch zijn, maar een afstand c tussen de middelpunten hebben (zie figuur 1b).
(c) Beargumenteer dat de arbeid W die ik nu moet verrichten om een lading $\pm Q$ op de twee schillen te brengen, gegeven wordt door een uitdrukking van de vorm

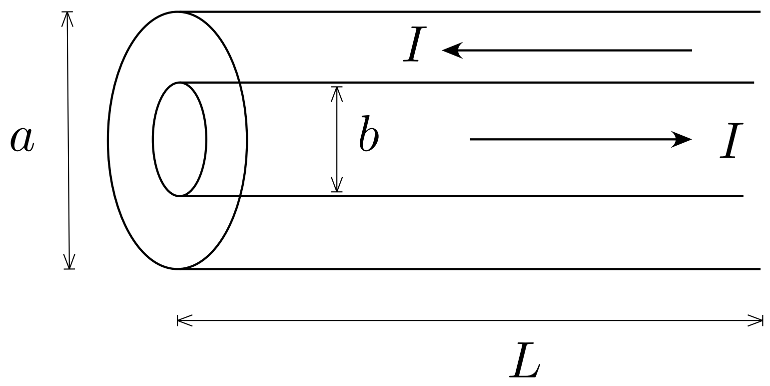
$$W = f(a, b, c)Q^2.$$

Het is niet nodig de functie f te berekenen.

2. *(a)* Beschouw een gesloten kromme C, die een magnetische flux ϕ omvat. Laat zien, dat uit de definitie van de vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ volgt dat $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \phi$.
(b) Een oneindig lange, cylindrische spoel (straal R_0) omvat een magnetische flux ϕ_0. Bereken de vectorpotentiaal $\vec{A}_0(\vec{r})$ binnen en buiten de spoel. [U mag veronderstellen dat het magneetveld buiten de spoel nul is, en binnen de spoel uniform en axiaal gericht.]
(c) Stel $\phi_0 \neq 0$. Is het mogelijk om door middel van een ijktransformatie van $\vec{A}_0(\vec{r})$ een nieuwe vectorpotentiaal te construeren die gelijk is aan nul buiten de spoel? Beargumenteer Uw antwoord.

3. Een coaxiaalkabel bestaat uit twee concentrische perfekt geleidende cylinders (diameter a en b, lengte L, zie figuur 2) waartussen een potentiaalverschil V is aangebracht. (De binnenste cylinder heeft de hoogste potentiaal.) Een stroom I door de binnenste cylinder stroomt terug via de buitenste cylinder.
(a) Bereken de lading op beide cylinders.
(b) Bereken de grootte en richting van de Poyntingvector in de ruimte tussen de cylinders.
(c) Bereken de energie die in een tijd Δt van het ene uiteinde van de coaxiaalkabel naar het andere uiteinde wordt vervoerd.

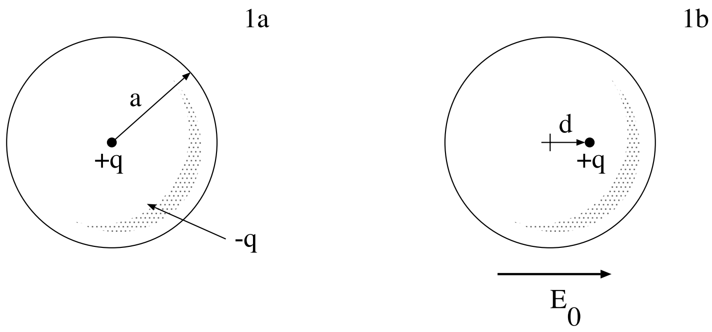
4. *(a)* Laat zien dat $|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2$ relativistisch invariant is.
(b) Stel dat het magnetische veld nul is in een bepaald punt in stelsel S. Bestaat er een stelsel S' waarin het elektrische veld nul is in dat punt? Beargumenteer Uw antwoord.
(c) Stel dat het elektrische en magnetische veld loodrecht op elkaar staan in een



bepaald punt in stelsel S. Bewijs dat ze dan ook loodrecht op elkaar staan in dat punt in elk ander stelsel S'.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 20 JANUARI 1997, 9–12 UUR.

1. Een neutraal atoom heeft een ladingsverdeling $\rho(\vec{r})$.
   (a) Geef de formule voor het dipoolmoment $\vec{p}$ van het atoom en laat zien dat $\vec{p}$ niet afhangt van de keuze van oorsprong van het coördinatenstelsel.
   Een simpel model van een atoom bestaat uit een puntlading q (de kern) in het middelpunt van een bolvormig symmetrische elektronenwolk van straal a, die homogeen geladen is met lading $-q$. (Zie figuur 1a.)



   (b) Bereken het dipoolmoment van dit atoom.
   Het atoom wordt geplaatst tussen twee condensatorplaten, waar een elektrisch veld $\vec{E}_0$ in de x-richting aanwezig is. De kern verschuift hierdoor uit het middelpunt van de elektronenwolk over een afstand d in de x-richting. (Zie figuur 1b.) De vervorming van de elektronenwolk door het elektrisch veld is verwaarloosbaar klein.
   (c) Wat is nu het dipoolmoment?
   (d) De polariseerbaarheid α van het atoom is gedefinieerd door
   $\alpha = |\vec{p}|/|\vec{E}_0|$. Bereken α.

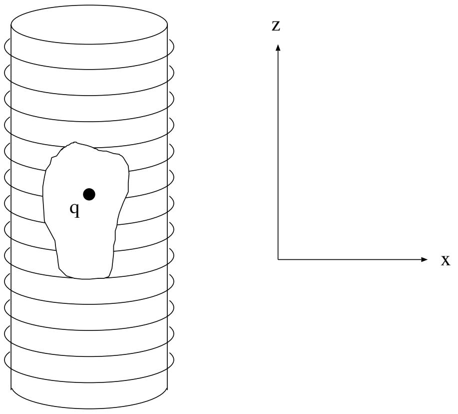
2. In de elektrodynamica bestaat er een zekere vrijheid in de keuze van de potentialen $\Phi(\vec{r},t)$ en $\vec{A}(\vec{r},t)$. Men spreekt over de vrijheid in de keuze van de ijk. Het is altijd mogelijk de ijk zo te kiezen dat $\Phi = 0$.
   (a) Waarom? En is het ook altijd mogelijk de ijk zo te kiezen dat $\vec{A} = 0$?
   Kies nu de ijk zo dat $\Phi = 0$.
   (b) Bepaal de differentiaalvergelijkingen die $\vec{A}$ relateren aan de ladings- en stroomdichtheden.
   (c) Bereken $\vec{A}$ voor het geval van een puntlading q die in rust is in de oorsprong.

3. Het licht van de zon treft de aarde met een (tijdsgemiddelde) intensiteit van $1200\,\mathrm{W/m^2}$. U mag veronderstellen dat het zonlicht monochromatisch is en lineair gepolariseerd. (In werkelijkheid is zonlicht wit en ongepolariseerd.)
   (a) Leid uit de Maxwellvergelijkingen af het verband tussen de grootte en de richting van de elektrische en magnetische velden.
   (b) Bereken de amplitude van het elektrische veld van het zonlicht op aarde.[1]
   (c) Het zonlicht valt loodrecht in op een absorberende plaat. Welke (tijdsgemiddelde) druk oefent het uit?

4. Een spoel is in rust, evenwijdig aan de z-as. Binnen in de spoel is een magneetveld $\vec{B}$ in de z-richting. De spoel krijgt een constante snelheid v in de x-richting en wekt daardoor een elektrisch veld $\vec{E}$ op.

[1]Gegeven is dat $c = 3.00 \cdot 10^8\,\mathrm{ms^{-1}}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{NA^{-2}}$.

(a) Bereken grootte en richting van $\vec{E}$ in de spoel.
Een puntlading q bevindt zich in de spoel en heeft net als de spoel een snelheid v in de x-richting. (Zie figuur 2.)



(b) Bereken de elektromagnetische kracht op de puntlading.
(c) Wat zouden de antwoorden op vragen a en b zijn als de snelheid v van spoel en puntlading niet in de x-richting was maar in de z-richting?

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 24 FEBRUARI 1997, 9–12 UUR.

1. In een deeltje is een stroomverdeling $\vec{j}(\vec{r})$.
(a) Geef de formule voor het magnetische dipoolmoment $\vec{\mu}$ van het deeltje en laat zien dat $\vec{\mu}$ niet afhangt van de plaats van het deeltje.
In bolcoördinaten r, θ, ϕ is de stroomverdeling gegeven door
$\vec{j} = \hat{\phi} a e^{-br^2} \sin\theta$, waarbij a en b constanten zijn.
(b) Leid af dat de ladingsverdeling in het deeltje tijdsonafhankelijk is.
(c) Bereken $\vec{\mu}$.

2. De elektrostatische energie U van een ladingsverdeling ρ is gegeven door de integraal
$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})d\vec{r},$$
waarbij Φ de elektrische potentiaal is.
(a) Leid hieruit af een formule voor U die uitsluitend het elektrische veld $\vec{E}$ bevat (en dus niet ρ en Φ).
(b) Wat is U voor het geval van een homogeen geladen bol (straal a, totale lading Q)?

3. In het college hebben we in de elektrodynamica gebruik gemaakt van de Lorentz-ijk. In deze opgave onderzoeken we een andere ijk, de zogenaamde Coulomb-ijk. De Coulomb-ijk luidt
$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0.$$
(a) Laat zien dat in de Coulomb-ijk de scalaire potentiaal Φ voldoet aan de Poisson-vergelijking
$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}, t).$$
(b) Wat is de algemene oplossing van deze vergelijking?
(c) De potentiaal Φ reageert instantaan op veranderingen in de ladingsdichtheid ρ. Beargumenteer waarom hier geen sprake is van een schending van het principe van de relativiteitstheorie “dat geen signaal zich sneller kan voortplanten dan met de lichtsnelheid”.

4. *(a)* Geef de Liénard-Wiechert formules voor de elektromagnetische potentialen Φ en $\vec{A}$ en leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.
Een puntlading q beweegt met constante snelheid v langs de x-as. Op tijdstip t_0 bevindt q zich in het punt $(x_0, 0, 0)$.
(b) Bereken Φ in de oorsprong, door gebruik te maken van de Liénard-Wiechert formules.

5. *(a)* Hoe transformeren de elektromagnetische potentialen Φ en $\vec{A}$ bij verandering van inertiaalstelsel?
Een puntlading q beweegt met constante snelheid v langs de x-as. Op tijdstip t_0 bevindt q zich in het punt $(x_0, 0, 0)$.
(b) Bereken Φ in de oorsprong, door gebruik te maken van deze transformatieregels.

Tentamen Elektromagnetisme II, 18 augustus 1997, 9–12 uur.

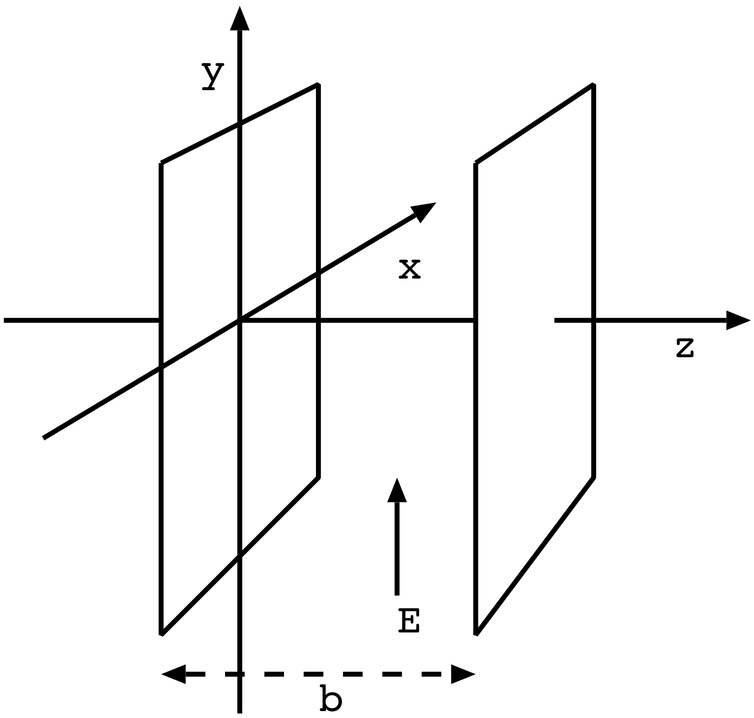
1. *(a)* Een lading q bevindt zich op het punt $(0, 0, d)$ en een tegengestelde lading $-q$ bevindt zich op het punt $(0, 0, -d)$. Geef de elektrostatische potentiaal $\Phi_0(\vec{r})$ tengevolge van beide puntladingen.
   (b) Beschouw nu een oneindige, *geaarde*, metalen plaat in het vlak $z = 0$, en een lading q op het punt $(0, 0, d)$. Beargumenteer dat voor $z \geq 0$ de potentiaal $\Phi_1(\vec{r})$ van dit probleem gelijk is aan de potentiaal $\Phi_0(\vec{r})$ van het vorige probleem. Wat is $\Phi_1(\vec{r})$voor $z < 0$?
   N.B.: een *geaarde* plaat is een plaat die dezelfde potentiaal heeft als in het oneindige.
   (c) Bereken de totale lading op de plaat.

2. We beschouwen de magnetostatica in de ijk $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. We definiëren een nieuw veld $\vec{W}(\vec{r})$ als volgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{W} = \vec{A}.$$

   (a) Beargumenteer waarom het altijd mogelijk is om zo'n veld $\vec{W}$ te construeren.
   (b) Leid een differentiaalvergelijking af tussen $\vec{W}$ en $\vec{B}$.
   (c) Bewijs de algemene relatie

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{B}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, d\vec{r}\,'.$$



3. Een elektromagnetische golf plant zich voort in de x-richting in de ruimte tussen twee geleidende platen op $z = 0$ en $z = b$ (zie figuur). Beschouw een "transversaal

elektrische” (TE) golf van de vorm $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\,E'(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$.
(a) Geef de differentiaalvergelijking plus de randvoorwaarden waaraan de functie $E'(z)$ moet voldoen.
(b) Bepaal de oplossing(en) en het bijbehorende magnetische veld.
(c) Voor $\omega < \omega_{\mathrm{c}}$ kan de TE golf zich niet voortplanten. Bepaal deze “cutoff-frequentie” ω_{c}.

4. In de relativiteitstheorie geldt de tweede wet van Newton in de vorm

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2}$$

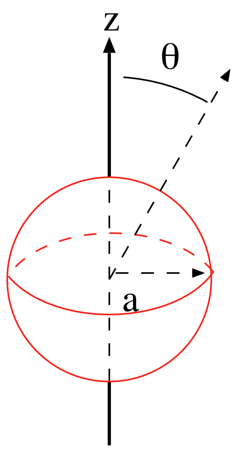
maar *niet* in de vorm

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{3}$$

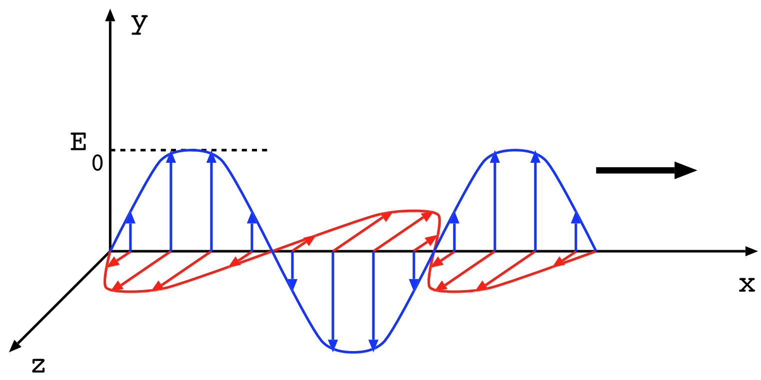
(a) Leg uit wat het verschil is tussen vergelijkingen (1) en (2). Waarom verdwijnt dit verschil in de klassieke mechanica?
(b) Stel een deeltje is in rust in inertiaalstelsel S. We beschouwen nu een tweede inertiaalstelsel S', wat ten opzichte van S met snelheid v_{R} in de x-richting beweegt. Bereken de kracht $\vec{F}'$ op het deeltje in stelsel S', gegeven de kracht $\vec{F}$ in stelsel S.
(c) Toon aan dat de vector $\vec{K} = (1-|\vec{v}|^2/c^2)^{-1/2}\,\vec{F}$ uit te breiden is tot een viervector.

Tentamen Elektromagnetisme II, 4 maart 1998, 9–12 uur.

1. Beschouw een neutraal molekuul met ladingsverdeling $\rho(\vec{r})$.
   (a) Geef de uitdrukking voor het dipoolmoment van het molekuul.
   (b) Bereken in dipoolbenadering de elektrische potentiaal op grote afstand van het molekuul.



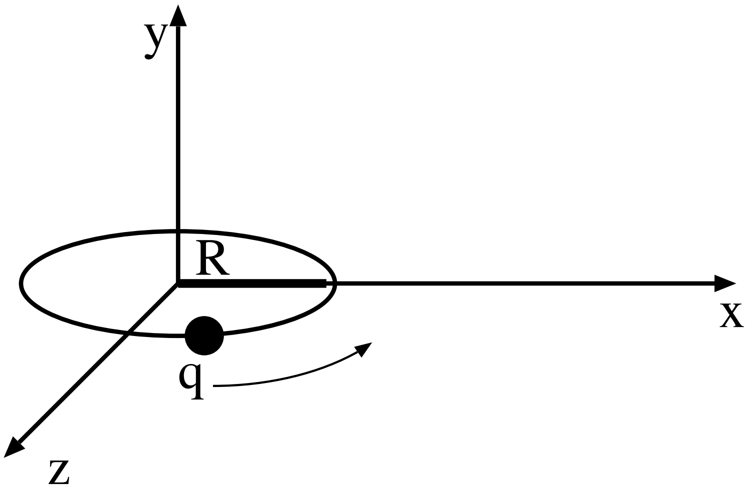
   (c) Een eenvoudig model voor het molekuul is een bolvormige schil met straal a en oppervlakteladingsdichtheid $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ (zie figuur 1). Bereken het dipoolmoment van deze ladingsverdeling.



2. Beschouw een monochromatische vlakke elektromagnetische golf, die zich in de x-richting in vacuüm voortplant en lineair gepolariseerd is met elektrisch veld in de y-richting (zie figuur 2).
   (a) Bereken alle componenten van de Maxwell-stress-tensor voor deze golf.
   De golf valt loodrecht op een absorberend vlak, met oppervlak S.
   (b) Bereken de kracht die de golf op het vlak uitoefent, gemiddeld over de tijd.
   (c) Het door het vlak geabsorbeerde vermogen is 1300 W. Hoe kun je hieruit de amplitudes van de elektrische en magnetische velden bepalen?

3. Een deeltje met lading q beweegt in een cirkel met straal R met constante hoekfrequentie ω. We veronderstellen dat de cirkel in het $x - y$ vlak ligt, met middelpunt in de oorsprong (zie figuur 3). Laat op $t = 0$ het deeltje zich in het punt $(R, 0, 0)$ bevinden.

   (a) Geef de algemene formules voor de Liénard-Wiechert-potentialen $\Phi(\vec{r}, t)$ en $\vec{A}(\vec{r}, t)$. (Leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.)



(b) Bereken Φ en $\vec{A}$ in het middelpunt van de cirkel, als functie van de tijd t. Onder welke voorwaarden kunnen we retardatie-effecten verwaarlozen?

4. Het inertiaalstelsel S' beweegt ten opzichte van inertiaalstelsel S met een snelheid v in de x-richting.
(a) Leid uit de Lorentztransformatie van ruimte en tijd de relatie af tussen de partiële afgeleiden
$\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ in stelsel S en $\frac{\partial}{\partial t'}$, $\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z'}$ in stelsel S'.
(b) Neem als uitgangspunt dat de Maxwellvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial z}E_x(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial x}E_z(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}B_y(\vec{r},t)$$

invariant is onder Lorentztransformatie. Leid hieruit af bepaalde transformatieregels voor de elektrische en magnetische velden.

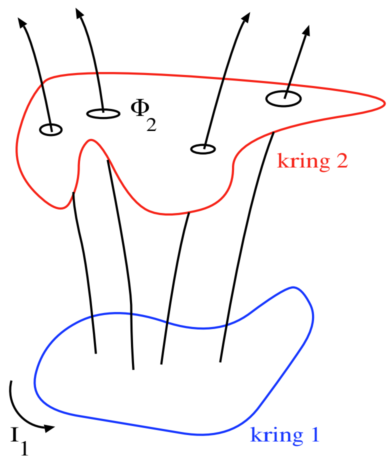
Tentamen Elektromagnetisme II, 17 april 1998, 9–12 uur.

1. We kennen twee uitdrukkingen voor de elektrostatische energie van een ladingsverdeling $\rho(\vec{r})$ [met bijbehorende potentiaal $V(\vec{r})$ en elektrisch veld $\vec{E}(\vec{r})$]:

$$\begin{aligned} W_1 &= \tfrac{1}{2}\int \rho(\vec{r})V(\vec{r})\,d\vec{r}, \\ W_2 &= \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\int |\vec{E}(\vec{r})|^2\,d\vec{r}. \end{aligned}$$

(a) Laat zien dat $W_1 = W_2$. Geef aan op welk punt in de afleiding U gebruikt dat de integraal in W_2 zich uitstrekt over de gehele ruimte (en niet slechts over het volume waar $\rho \neq 0$).
(b) Beschouw een uniform geladen bol (straal R, totale lading Q). Bereken W_1 en W_2 en verifieer dat $W_1 = W_2$.
(c) Een tweede identieke bol bevindt zich op een grote afstand L van de bol uit opgave *b*. Veronderstel $L \gg R$. Wat is de totale elektrostatische energie van dit systeem van twee bollen?

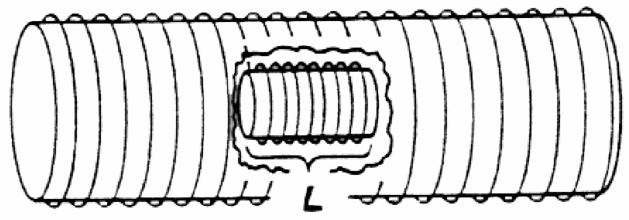
2. *(a)* Door een stroomkring C loopt een stroom I. Geef een integraalformule voor de vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ opgewekt door deze stroomkring. Welke ijk heeft U verondersteld?



(b) Beschouw nu twee stroomkringen 1 en 2 (zie figuur). Als er een stroom I_1 door kring 1 loopt dan is de flux Φ_2 omvat door kring 2 gegeven door $\Phi_2 = M_{21}I_1$. Omgekeerd geldt dat een stroom I_2 door kring 2 een flux $\Phi_1 = M_{12}I_2$ door kring 1 induceert. Bewijs dat

$$M_{12} = M_{21}. \qquad (*)$$

(c) Een korte spoel (lengte L, straal R, N_1 windingen per eenheid van lengte) ligt op de as van een zeer lange spoel (N_2 windingen per eenheid van lengte). [Zie figuur.] Een stroom I stroomt door de korte spoel. Wat is de totale flux omvat door de lange spoel?
Hint: gebruik vergelijking $(*)$ uit opgave *b*.



3. *(a)* Leid uit de Maxwellvergelijkingen in vacuum af de twee golfvergelijkingen

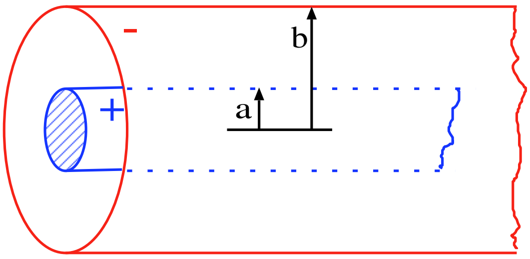
$$\begin{aligned} \Delta\vec{E} &= \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \\ \Delta\vec{B} &= \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

   (b) Stel $\vec{E} = f(x - vt)\hat{z}$. Laat zien dat dit, voor willekeurige functie f, een oplossing is van de golfvergelijking — mits v goed gekozen is. Bepaal v.
   (c) Bereken het magnetische veld dat behoort bij het elektrische veld uit opgave *b*.

4. *(a)* In inertiaalstelsel S geldt $\vec{B} = 0$, $\vec{E} \neq 0$. Geef de elektrische en magnetische velden $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ in stelsel S', dat ten opzichte van S met snelheid v in de z-richting beweegt. Geef ook de relatie tussen punten $\vec{r}$,t in stelsel S en $\vec{r}'$,t' in stelsel S'. [*Let op:* v is in de z-richting.]
   (b) Een puntlading q beweegt met snelheid v. Bereken het elektrische veld, gebruik makend van de transformatie naar een stelsel waarin q in rust is. Schets de veldlijnen. In welke richting is het elektrische veld het grootst?

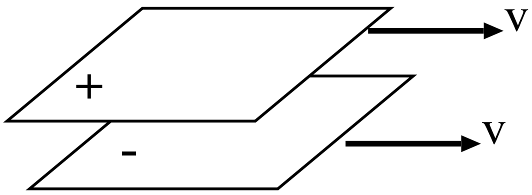
Tentamen Elektromagnetisme II, 3 februari 1999, 14–17 uur.

1. Een co-axiaalkabel van lengte L bestaat uit twee concentrische cylinders (zie figuur). De binnencylinder (straal a) is massief, de buitencylinder (straal b) is hol. Beide cylinders zijn uniform geladen: De totale lading op de binnencylinder is Q en op de buitencylinder $-Q$.



   (a) Bereken het elektrische veld binnen de binnenste cylinder, tussen beide cylinders en buiten de buitenste cylinder.
   (b) Bereken de elektrostatische energie van dit systeem.
   (c) Bereken het potentiaalverschil tussen een punt op de as van de binnencylinder en een punt op de buitencylinder. Waarom hangt het antwoord niet af van welk punt ik kies op de buitencylinder?

2. Een condensator bestaat uit twee evenwijdige platen op een afstand d van elkaar. De bovenste plaat heeft totale lading Q, de onderste plaat $-Q$. Beide platen zijn uniform geladen (oppervlakteladingsdichtheid $\pm\sigma$). De condensator beweegt met een snelheid v in de x-richting (zie figuur).



   (a) Bereken het magnetische veld tussen de platen, erboven en eronder.
   (b) Bereken de magnetische kracht op de bovenste plaat. Geef in een schets de richting aan.
   (c) Bij welke snelheid heft de magnetische kracht de elektrische kracht op?

3. Gegeven zijn de elektromagnetische potentialen (in bolcoördinaten)

$$\Phi(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{r}.$$

   (a) Bereken de bijbehorende elektrische en magnetische velden.
   (b) Bereken de bijbehorende lading- en stroomverdelingen.
   (c) Door middel van een ijktransformatie wordt de vectorpotentiaal $\vec{A}$ gelijkgesteld aan nul. Welke ijktransformatie is dit? Wat wordt de nieuwe scalaire potentiaal Φ?

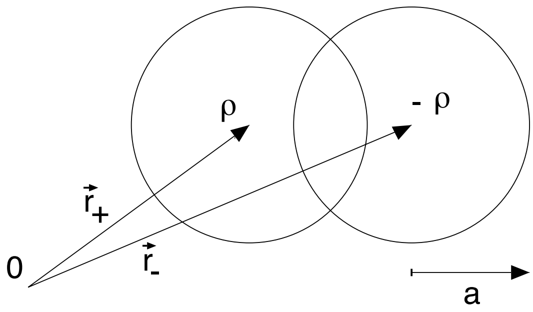
4. Definieer de "eigenversnelling" $\vec{\alpha}$ als de afgeleide van de eigensnelheid $\vec{\eta}$ naar de eigentijd τ:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\eta}}{d\tau}.$$

(a) Het is mogelijk om $\vec{\alpha}$ uit te breiden tot een viervector met componenten α^μ. Wat moeten we dan kiezen voor α^0? Leg ook uit wat men bedoelt met een viervector.
(b) Druk α^0 en $\vec{\alpha}$ uit in termen van de gewone snelheid en versnelling $\vec{v}$ en $\vec{a}$.
(c) Bereken het inproduct van de viervectoren η^μ en α^μ.

Tentamen Elektromagnetisme II, 7 juni 1999, 14–17 uur.

1. *(a)* Bereken het elektrische veld binnen en buiten een homogeen geladen bol (straal a, ladingsdichtheid ρ binnen de bol).
   (b) Bereken de elektrostatische potentiaal binnen en buiten de bol. Kies het referentiepunt zó, dat de potentiaal nul is in het middelpunt van de bol.
   (c) Twee homogeen geladen bollen, elk met straal a en tegengestelde ladingsdichtheden $+\rho$ en $-\rho$, overlappen elkaar gedeeltelijk. Het middelpunt van de positieve bol ligt op $\vec{r}_+$, dat van de negatieve bol op $\vec{r}_-$ (zie figuur).



   Bewijs dat het elektrische veld in het gebied waar de bollen elkaar overlappen constant is en bereken die constante.

2. Gegeven zijn de elektromagnetische potentialen

$$\Phi(\vec{r},t) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r},t) = A_0 \sin(ax - bt)\hat{y},$$

   waarbij A_0, a en b willekeurige constanten zijn.
   (a) Bereken de bijbehorende elektrische en magnetische velden.
   (b) Bereken de bijbehorende lading- en stroomverdelingen ρ en $\vec{j}$.
   (c) Stel nu dat ρ en $\vec{j}$ beiden overal gelijk zijn aan nul. Welke relatie volgt dan tussen de constanten a en b?
   (d) Is het mogelijk om door middel van een ijktransformatie de vectorpotentiaal $\vec{A}$ gelijk te stellen aan nul? Beargumenteer uw antwoord.

3. Een elektromagnetische golf in vacuum is gegeven door de elektrische en magnetische velden

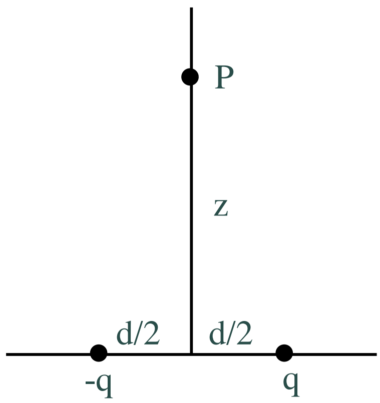
$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{y}, \quad \vec{B} = \frac{1}{c} E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}.$$

(a) Bereken de tijdsgemiddelde energiedichtheid en impulsdichtheid.
(b) De golf wordt geabsorbeerd door een oppervlak van $1\,\mathrm{m}^2$ loodrecht op de voortplantingsrichting. Hoevel Joule aan energie wordt door dit oppervlak in 1 seconde opgenomen? (Dit is de *intensiteit* van de golf, in eenheden van $\mathrm{W/m}^2$.)
(c) Een zekere professor beweert dat op 'n zomerse dag de mensen op het strand languit op de grond liggen omdat ze worden neergedrukt door de stralingsdruk. Toon aan dat dit onzin is, door middel van een schatting van de kracht die het zonlicht op ons uitoefent. *Gegeven:* de intensiteit van het zonlicht op aarde is $1300\,\mathrm{W/m}^2$.

4. Een waarnemer W ziet de elektromagnetische golf in vacuum uit de vorige opgave. Een waarnemer W' beweegt ten opzichte van W met constante snelheid v in de x-richting.
(a) Welke elektrische en magnetische velden neemt W' waar?
(b) Welke frequentie ω' en welk golfgetal k' neemt W' waar?
(c) Welke golfsnelheid volgt uit ω' en k'? Verifieer dat het antwoord gelijk is aan de golfsnelheid die volgt uit ω en k.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 24 JANUARI 2000, 9–12 UUR.

1. *(a)* Geef de formule voor de elektrostatische potentiaal in dipoolbenadering en *bereken* het bijbehorende elektrische veld.
   (b) Een lading q bevindt zich op het punt $(d/2, 0, 0)$ en een lading $-q$ op het punt $(-d/2, 0, 0)$. Bereken exact het elektrische veld in het punt $P = (0, 0, z)$ (zie figuur).

   (c) Laat zien dat het exacte elektrische veld uit opgave b voor $z \gg d$ overgaat in de dipoolbenadering van opgave a.

2. Door een oneindig lange spoel (straal a, n windingen per meter) loopt een stroom I.
   (a) Bereken het magnetische veld binnen en buiten de spoel. Wat is de door de spoel omvatte flux?
   (b) We zoeken de bijbehorende vectorpotentiaal, in de Lorentzijk. Laat zien dat

   $$\vec{A} = \frac{1}{2}\mu_0 n I R \hat{\phi}$$

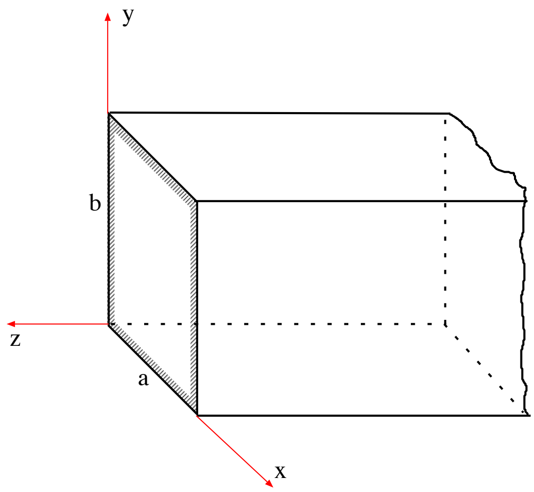
   het juiste antwoord is binnen de spoel (voor $R < a$).
   (c) Wat is $\vec{A}$ buiten de spoel?
   (d) In een andere ijk zal de vectorpotentiaal anders zijn. Kun je de ijk zodanig kiezen dat $\vec{A} = 0$ buiten de spoel? Zo nee, waarom niet; zo ja, wat is dan die ijk?

3. Beschouw de voortplanting van een transversaal magnetische golf (TM golf) door een golfpijp met een rechthoekige doorsnede (zie figuur). Zoek een magnetisch veld van de vorm

   $$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{x} B(y) e^{i(kz-\omega t)}\right\}$$

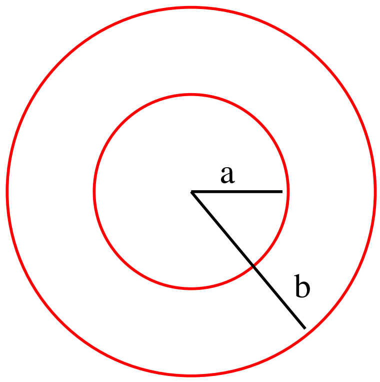
   (a) Geef de differentiaalvergelijking plus randvoorwaarden waar de functie $B(y)$ aan moet voldoen. Waarom kan $B(y)$ niet ook van x afhangen?
   (b) Bepaal de functie $B(y)$. Wat is de dispersierelatie tussen k en ω? Beneden welke frequentie is er geen lopende TM golf mogelijk?

4. *(a)* Beargumenteer dat de eigensnelheid $d\vec{r}/d\tau$ uit te breiden is tot een viervector. Wat is de bijbehorende nulde component?
   (b) Zelfde vraag voor de stroomdichtheid $\vec{j}$.



TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 10 MAART 2000, 14–17 UUR.

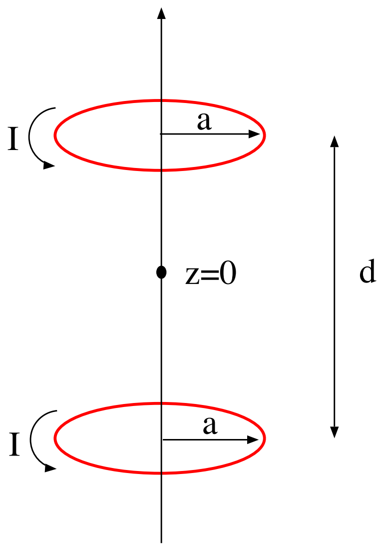
1. Beschouw twee concentrische metalen bolschillen (zie figuur 1). Op de binnenste schil (straal a) wordt een lading Q geplaatst, op de buitenste schil (straal b) een lading $-Q$.



(a) Bereken het elektrische veld voor $r < a$, voor $a < r < b$ en voor $r > b$.
(b) Bereken het potentiaalverschil tussen de twee schillen.
(c) Wat is de elektrostatische energie die in deze condensator is opgeslagen?

2. Een Helmholtzspoel bestaat uit twee evenwijdige cirkelvormige stroomkringen (straal a), op een afstand d recht boven elkaar (zie figuur). De middelpunten liggen op $(0, 0, -d/2)$ en $(0, 0, d/2)$. Een stroom I loopt door elk van beide kringen, in dezelfde richting. Met $\vec{B}_0$ duiden we aan het magnetische veld in het punt $(0, 0, 0)$, precies tussen de twee stroomkringen in.
(a) Schets de magnetische veldlijnen. Wat er zou gebeuren met $\vec{B}_0$ als de stroom door één van de twee kringen zou worden uitgezet? (De stroom door de andere kring wordt constant gehouden.)
(b) Bereken (veronderstellende dat $d \gg a$) het veld $\vec{B}_0$ in dipoolbenadering.
(c) Bereken $\vec{B}_0$ exact met behulp van de wet van Biot en Savart. Verifieer dat u de dipoolbenadering terugvindt in de limiet $d/a \to \infty$.

3. De vier Maxwellvergelijkingen waren in essentie al bekend vóór het werk van J.C. Maxwell, echter zonder de term $\varepsilon_0\mu_0\partial\vec{E}/\partial t$ in de vierde vergelijking. Laat zien dat



deze extra term nodig is om de Maxwellvergelijkingen in overeenstemming te brengen met de wet van behoud van lading.

4. Een student heeft op college geleerd hoe je formules uit de magnetostatica kunt vinden via de analogie met formules uit de elektrostatica. Op deze wijze komt de student op een *verkeerde* formule voor het magnetische veld van een puntlading q in de oorsprong met snelheid $\vec{v}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}.$$

   Waarom gaat de analogie niet op? Onder welke omstandigheden is de gevonden formule toch een goede benadering?

5. *(a)* Hoe transformeren de potentialen $V(\vec{r}, t)$ en $\vec{A}(\vec{r}, t)$ bij verandering van inertiaalstelsel S naar S'?
   (b) Gegeven is dat de potentialen in S voldoen aan de Lorentzijk,

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}.$$

   Waarom voldoen de potentialen in S' dan ook aan de Lorentzijk?
   (c) In de Lorentzijk gelden de golfvergelijkingen

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial \vec{r}^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j},$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vec{r}^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

   waarbij $\vec{j}(\vec{r}, t)$ en $\rho(\vec{r}, t)$ de stroom- en ladingsdichtheden zijn. Waarom hebben deze golfvergelijkingen in elk inertiaalstelsel dezelfde vorm?

Tentamen Elektromagnetisme II, 15 januari 2001, 10–13 uur.

1. Een oneindig lange cylinder (straal a) bevat een ladingsdichtheid die evenredig is met de afstand tot de as; in formulevorm:
   $\rho(R) = CR$ voor $R < a$ en $\rho(R) = 0$ voor $R > a$.
   (a) Bereken de relatie tussen de constante C en de totale lading Q die er zit in een segment van de cylinder van lengte L. Wat is de dimensie van C?
   (b) Bereken het elektrische veld binnen en buiten de cylinder.
   (c) Laat zien dat er oneindig veel elektrostatische energie zit opgeslagen in een segment van lengte L. Leg uit hoe dit kan.

2. Beschouw twee willekeurige stroomkringen C_1 en C_2. Door C_1 loopt een stroom I_1 en door C_2 een stroom I_2.
   (a) Schrijf op de formule van Biot en Savart voor het magneetveld $\vec{B}_1(\vec{r})$ dat opgewekt wordt door stroomkring 1. Geef in een tekening weer wat de gebruikte symbolen betekenen.
   (b) Leid af, uitgaande van de formule voor de Lorentzkracht, dat de kracht $\vec{F}_{12}$ die stroomkring 1 uitoefent op stroomkring 2 gegeven is door

   $$\vec{F}_{12} = I_2 \oint_{C_2} d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1.$$

   Geef in een tekening weer wat de gebruikte symbolen betekenen.
   (c) Bewijs de derde wet van Newton: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.
   Hint: U mag gebruiken dat

   $$\oint d\vec{l} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\oint d\vec{l} \cdot \nabla \frac{1}{r} = 0.$$

3. Het elektromagnetische veld in vacuüm voldoet aan de golfvergelijkingen

   $$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E},$$
   $$\Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}.$$

   (a) Leid af een relatie tussen de golfsnelheid c en de constantes ε_0 en μ_0.
   (b) Bewijs, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat het elektromagnetische veld in vacuüm een transversaal veld is.
   (c) Leid af een relatie tussen de grootte en richting van $\vec{E}$ en $\vec{B}$ voor een lineair gepolariseerde vlakke golf in vacuüm.

4. Beschouw twee inertiaalstelsels S en S'. Het stelsel S' beweegt ten opzichte van S met een snelheid v_{R} in de x-richting.
   (a) Bereken, uitgaande van de Lorentztransformatie, hoe de drie componenten v_x, v_y, v_z van de snelheid transformeren bij overgang van S naar S'.
   (b) Is het mogelijk om de snelheid uit te breiden tot een viervector? Zo ja, wat is dan de vierde component; Zo nee, waarom niet.
   (c) Een deeltje beweegt in stelsel S met de lichtsnelheid c in de y-richting. Leid af dat de grootte van de snelheid in stelsel S' nog steeds gelijk is aan c.
   Let op: de snelheid van het deeltje staat loodrecht op v_{R}.

Tentamen Elektromagnetisme II, 2 maart 2001, 14–17 uur.

1. Een oneindig lange cylindervormige draad (straal a, evenwijdig aan de z-as) bevat een stroomdichtheid die evenredig is met de afstand tot de as; in formulevorm: $\vec{j}(R) = CR\hat{z}$ voor $R < a$ en $\vec{j}(R) = 0$ voor $R > a$.
(a) Bereken de relatie tussen de constante C en de totale stroom I die door de draad loopt. Wat is de dimensie van C?
(b) Bereken het magnetische veld binnen en buiten de draad.
(c) Bereken de magnetische energie van de draad per eenheid van lengte.

2. *(a)* Gegeven is de vectorpotentiaal $\vec{A} = A_0(\vec{r} \times \hat{z})$, waarbij A_0 een constante is en $\hat{z}$ een eenheidsvector in de z-richting. Bereken het bijbehorende magnetische veld.
(b) Construeer een ijktransformatie van $\vec{A}$ naar $\vec{A}' = (2A_0 y, 0, 0)$.
Hoe verandert de scalaire potentiaal Φ door deze transformatie?
(c) Stel dat A_0 niet constant is, maar van de tijd afhangt volgens $A_0 = a_0 \cos \omega t$. Wat is dan het magnetische veld?

3. Een oneindig lange cylinder (straal a, evenwijdig aan de z-as) wordt gebruikt als golfpijp. De cylinder is binnenin vacuüm. U mag veronderstellen dat de wand van de cylinder een ideale geleider is. We zoeken een oplossing van de Maxwellvergelijkingen voor $R < a$ van de vorm (in cylindercoördinaten)

$$\vec{E}(R, \phi, z, t) = \mathrm{Re}\, \vec{E}_0(R) e^{i(kz - \omega t)},$$
$$\vec{B}(R, \phi, z, t) = \mathrm{Re}\, \vec{B}_0(R) e^{i(kz - \omega t)}.$$

(a) Geef de golfvergelijkingen plus randvoorwaarden waaraan $\vec{E}_0(R)$ en $\vec{B}_0(R)$ moeten voldoen.
(b) Veronderstel dat de z-component van $\vec{E}$ gelijk is aan nul. Bewijs dat dan ook de R-component van $\vec{E}$ nul is.
(c) Bereken de ϕ-component van $\vec{E}$. Wat is de dispersierelatie van deze TE golf?
Ter herinnering: De Besselfunctie $J_0(x)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $xJ_0'' + J_0' + xJ_0 = 0$.

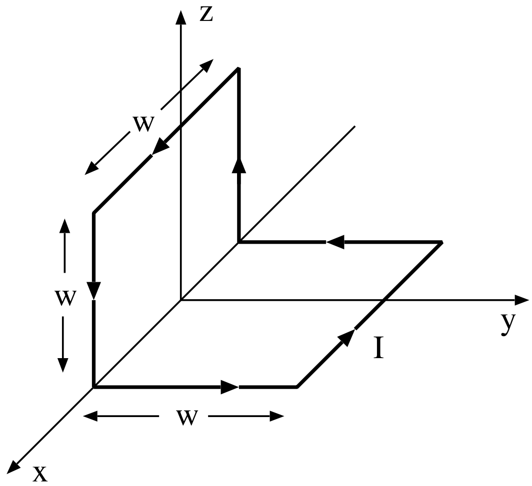
4. *(a)* Bewijs dat $|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2$ invariant is onder Lorentztransformatie.
(b) Stel dat in een of ander inertiaalstelsel S_0 geldt dat in een zeker punt P het magnetische veld $\vec{B}$ gelijk is aan nul maar het elektrische veld $\vec{E}$ niet. Bewijs dan dat in elke ander inertiaalstelsel geldt dat $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.
(c) Bestaat er een Lorentztransformatie zodanig dat in punt P het elektrische veld nul is en het magnetische veld niet? Beargumenteer uw antwoord.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 16 JANUARI 2002, 14–17 UUR.

1. Het magnetisch dipoolmoment $\vec{\mu}$ van een stroomverdeling $\vec{\jmath}(\vec{r})$ is gegeven door

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{\jmath}\, dV.$$

(a) Leid af dat voor een vlakke stroomkring (oppervlak S, stroom I) geldt dat $|\vec{\mu}| = SI$. In welke richting wijst $\vec{\mu}$?



figuur 1

(b) Bereken de grootte van $\vec{\mu}$ voor de stroomkring in figuur 1. Geef de richting aan in een schets.

2. De stroomverdeling $\vec{\jmath}(\vec{r}, t)$ in een stroomkring hangt lineair van de tijd af, volgens $\vec{\jmath} = \vec{f}(\vec{r})t$. Er vindt geen ladingshoping plaats.
(a) Leid af dat $\int \vec{f}(\vec{r})\, dV = 0$.
(b) Druk de vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r}, t)$ uit in termen van een integraal van $\vec{f}$.
(c) Toon aan dat, in dit speciale geval, retardatie geen effect heeft op $\vec{A}$.
(d) Toon aan dat het elektrische veld dat door de stroomkring wordt opgewekt onafhankelijk is van de tijd.

3. In vacuüm luidt de stelling van Poynting

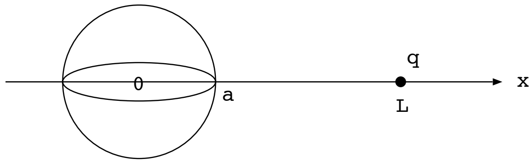
$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{\text{elektrisch}} + u_{\text{magnetisch}}) = -\text{div}\,\vec{S}.$$

(a) Druk $u_{\text{elektrisch}}$, $u_{\text{magnetisch}}$ en $\vec{S}$ uit in termen van $\vec{E}$ en $\vec{B}$.
(b) Voor tijdsonafhankelijke velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ is het linkerlid nul, dus $\text{div}\,\vec{S} = 0$. Leid dit direct af uit de Maxwell vergelijkingen in vacuüm.
(c) Bereken $\text{div}\,\vec{S}$ voor tijdsonafhankelijke $\vec{E}$ en $\vec{B}$ in aanwezigheid van lading en stroom. Leg een verband tussen het resultaat en de wet van behoud van energie.

4. In inertiaalstelsel S geldt in een bepaald punt P dat $\vec{B} = 0$, $\vec{E} \neq 0$. Stelsel S' beweegt ten opzichte van S met een snelheid v in de x-richting.
(a) Bereken $\vec{E}'$ in termen van $\vec{E}$ (in punt P).
(b) Laat zien dat $\vec{B}'$ en $\vec{E}'$ loodrecht op elkaar staan in punt P.
Dit is een bijzonder geval van een meer algemene stelling, dat het inproduct $\vec{E} \cdot \vec{B}$ in elk punt invariant is onder Lorentztransformaties.
(c) Bewijs deze stelling.

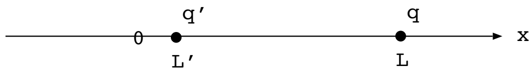
Tentamen Elektromagnetisme II, 1 maart 2002, 14–17 uur.

1. Een geleidende bol (straal a, middelpunt in de oorsprong) is geaard (dat wil zeggen, zijn potentiaal is nul). Een puntlading q bevindt zich buiten de bol in het punt $(L, 0, 0)$. Zie figuur 1. We zoeken de elektrische potentiaal $V(\vec{r})$ buiten de bol (dus voor $|\vec{r}| > a$).



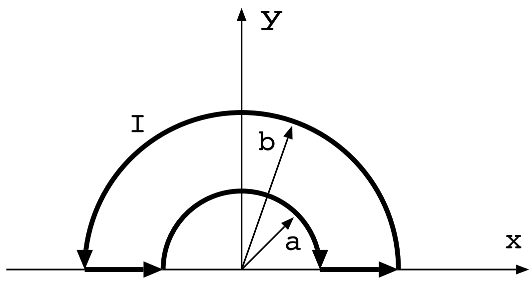
figuur 1

(a) Geef de differentiaalvergelijking en randvoorwaarde waar V aan moet voldoen. Om dit probleem op te lossen onderzoeken we wat er zou gebeuren als we de bol zouden vervangen door een tweede puntlading q' in het punt $(L', 0, 0)$. Zie figuur 2.



figuur 2

(b) Bereken de potentiaal van de twee puntladingen in het punt (x, y, z) met $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
(c) Los nu het probleem op van puntlading en bol.
Hint: Kies $q' = -aq/L$ en $L' = a^2/L$.

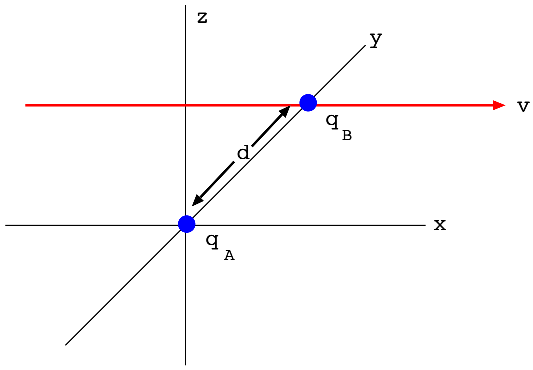


figuur 3

2. Beschouw de vlakke stroomkring C in figuur 3. Er loopt een stroom I door de kring. We zoeken de vectorpotentiaal $\vec{A}(0)$ in de oorsprong.

(a) Geef een formule voor $\vec{A}(0)$ in termen van een kringintegraal. Leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.
(b) Bereken $\vec{A}(0)$.
(c) Bereken het magnetische dipoolmoment van de stroomkring.

3. Een elektromagnetisch veld *in vacuum* wordt beschreven door de potentialen $V = 0$, $\vec{A} = A_0 \hat{y} \sin(kx - \omega t)$.
(a) Bereken de bijbehorende velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$.
(b) Bereken de relatie tussen het golfgetal k en de frequentie ω.
(c) Is het mogelijk om een ijktransformatie te vinden zodanig dat de vectorpotentiaal overal gelijk wordt aan nul? Zo neen, waarom niet; Zo ja, wat is dan die transformatie.



figuur 4

4. Lading q_A is in rust in de oorsprong in inertiaalstelsel S. Lading q_B beweegt met snelheid v in de x-richting langs de lijn $y = d$, $z = 0$ (zie figuur 4). We beschouwen het moment dat q_B de y-as kruist.
(a) Wat is de elektromagnetische kracht $\vec{F}_B$ op q_B in stelsel S.
(b) Bereken de getransformeerde kracht $\vec{F}'_B$ in stelsel S' waarin q_B in rust is.
(c) Bereken ook de kracht $\vec{F}'_A$ op q_A in stelsel S'. Wat impliceert Uw antwoord voor de derde wet van Newton (actie = −reactie)?

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 20 JANUARI 2003, 10–13 UUR.

1. Beschouw het magnetische veld

$$\vec{B}(x,y,z) = axy\,\hat{x} + by^2\,\hat{y}$$

(a) Welke relatie moet er zijn tussen de constantes a en b?
(b) Bereken de stroomverdeling $\vec{j}(x,y,z)$ die dit veld veroorzaakt.
(c) Welke vectorpotentiaal $\vec{A}(x,y,z)$ hoort bij dit magnetische veld? Kies de ijk $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.
(d) De antwoorden uit onderdelen (b) en (c) zijn gerelateerd door

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

Laat zien dat deze relatie algemeen geldig is in de magnetostatica.

2. Een neutraal molekuul heeft een ladingsverdeling $\rho(\vec{r})$. Het molekuul wordt verplaatst vanuit het oneindige naar een punt $\vec{r}_0$ in een condensator, waar een elektrisch veld $\vec{E}(\vec{r})$ heerst. De bijbehorende potentiaal $V(\vec{r})$ is nul in het oneindige.
(a) Bewijs dat het dipoolmoment $\vec{p}$ van het molekuul niet verandert door de verplaatsing.
(b) Beargumenteer dat de arbeid W die we moeten verrichten tijdens de verplaatsing gegeven is door

$$W = \int \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\vec{r}$$

Waarom speelt het elektrische veld van de dipool zélf geen rol?
(c) Leid af (uitgaande van een Taylorreeksontwikkeling van V) dat W bij benadering gegeven wordt door

$$W = -\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r}_0)$$

Onder welke veronderstelling is dit een goede benadering?

3. *(a)* Leid af uit de Maxwellvergelijkingen dat het elektrische veld voldoet aan de inhomogene golfvergelijking

$$-\Delta\vec{E} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\rho - \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}$$

(b) Hoe luidt de inhomogene golfvergelijking voor het magnetische veld?
(c) Geef de algemene oplossing van een inhomogene golfvergelijking en leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.
(d) Gebruik de algemene oplossing om de "vergelijking van Jefimenko" af te leiden, die luidt:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\vec{r}'\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(\vec{r}',t_R) + \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{c|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}',t_R)\right.\\ &\quad \left.-\frac{1}{c^2|\vec{r}-\vec{r}'|}\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}(\vec{r}',t_R)\right]\end{aligned}$$

4. Veronderstel dat er in inertiaalstelsel S een magnetisch veld $\vec{B} = B_0\hat{y}$ is, maar geen elektrisch veld. Als een lading q in S met een snelheid $\vec{v} = v_0\hat{x}$ beweegt, dan ondervindt deze lading een Lorentzkracht $\vec{F} = qv_0B_0\hat{z}$.
(a) Bereken de elektrische en magnetische velden in het stelsel S' waarin q in rust is.
(b) Welke kracht $\vec{F}'$ ondervindt de lading in dit ruststelsel?
(c) In 1952 schreef Einstein: *"Wat me min of meer direct tot de speciale relativiteitstheorie heeft gebracht, was de overtuiging dat de Lorentzkracht op een bewegende lading in een magnetisch veld niets anders is dan een elektrische kracht."* Leg uit wat Einstein bedoelde.
(d) De kracht $\vec{F}' = d\vec{p}'/dt'$ kan ook uit $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ berekend worden door een Lorentztransformatie van de impuls $\vec{p}$ en tijd t. Voer deze berekening uit.

Tentamen Elektromagnetisme II, 23 april 2003, 9–12 uur.

1. Beschouw een systeem van N geleiders. Geleider i heeft lading Q_i en potentiaal V_i. Ladingen en potentialen zijn aan elkaar gerelateerd door

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} V_j, \quad V_i = \sum_{j=1}^{N} P_{ij} Q_j.$$

De coëfficienten C_{ij} en P_{ij} vormen twee $N \times N$ matrices.
(a) Wat is de relatie tussen de beide matrices?
(b) Bereken de totale elektrostatische energie U van het systeem als functie van de ladingen op de geleiders. Bereken vervolgens de partiële afgeleide $\partial U/\partial Q_i$ en laat zien dat het antwoord geschreven kan worden in de vorm

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = \sum_{j=1}^{N} S_{ij} Q_j, \quad S_{ij} = \frac{P_{ij} + P_{ji}}{2}.$$

(c) Je kunt $\partial U/\partial Q_i$ ook op een andere manier berekenen, namelijk via de formule $\partial U/\partial Q_i = V_i$. Vergelijk het antwoord met dat van onderdeel *b* en bewijs dat de matrices P_{ij} en C_{ij} *symmetrisch* zijn.
(d) Stel dat er maar twee geleiders zijn ($N = 2$). Hun afstand R is groot ten opzichte van hun afmeting. Bereken bij benadering de waarde van de coëfficienten P_{12} en P_{21}.

2. *(a)* Leid uit de Maxwellvergelijkingen af dat ladings- en stroomdichtheid voldoen aan de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{j} = 0.$$

Waarom volgt uit deze vergelijking dat lading behouden is?
(b) Er bestaat ook een continuïteitsvergelijking voor energie. Hoe luidt die? Geef aan welke termen in die vergelijking de energiedichtheid representeren.
(c) Het uitproduct $\vec{E} \times \vec{B}$ van elektrisch en magnetisch veld speelt een rol in de wet van behoud van impuls. Welke rol?

3. Stel dat een ladingsdichtheid $\rho(\vec{r}, t)$ oscilleert in de tijd $\propto \cos \omega t$. Het zou bijvoorbeeld kunnen gaan om een trillend molekuul. In complexe notatie kunnen we schrijven

$$\rho(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\, \rho(\vec{r}) e^{i\omega t}.$$

De bijbehorende potentiaal $V(\vec{r}, t)$ heeft eenzelfde tijdsafhankelijkheid,

$$V(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\, V(\vec{r}) e^{i\omega t}.$$

(a) Laat zien (uitgaande van de algemene oplossing van de inhomogene golfvergelijking in de Lorentzijk) dat potentiaal en ladingsdichtheid verbonden zijn door de integraalvergelijking

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,'.$$

Wat is de relatie tussen k en ω?
(b) Welke term in deze integraalvergelijking beschrijft de retardatie-effecten? Wanneer zijn die effecten in dit voorbeeld te verwaarlozen?
(c) Laat zien, aan de hand van de integraalvergelijking, dat de potentiaal op grote afstand R van de trillende lading afvalt $\propto 1/R$. Waarom spreekt men dan van "straling"?

4. *(a)* Op het college hebben we gezien dat elektrische ladingsdichtheid en stroomdichtheid een viervector $(c\rho, \vec{j})$ vormen. *Wat houdt dat in?* Is het mogelijk om de totale lading Q van een deeltje uit te breiden tot een viervector? *Zo ja, hoe? Zo nee, waarom niet?*
(b) Een kubus in rust (zijde a_0) is homogeen geladen (ladingsdichtheid ρ_0). Als dezelfde kubus een snelheid v heeft (loodrecht op één van de zijvlakken) dan neemt de ladingsdichtheid toe. *Bereken hoeveel.* Bereken ook de verandering van de *totale lading* in de kubus.
(c) Laat zien dat de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{j} = 0$$

relativistisch invariant is.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 19 JANUARI 2004, 14–17 UUR.

1. Een zeer dunne, oneindig lange draad ligt langs de z-as. De draad is uniform geladen (lading λ per lengte-eenheid).
   (a) Bereken grootte en richting van het elektrische veld buiten de draad.

   We willen nu de eindige lengte L van de draad in rekening brengen. Veronderstel dat de draad zich uitstrekt van $z = -L/2$ tot $z = +L/2$. De volgende integraal is gegeven:

   $$\int (1+u^2)^{-3/2}\, du = u(1+u^2)^{-1/2}.$$

   (b) Bereken grootte en richting van het elektrische veld op een punt $(x, 0, 0)$ langs de x-as. Ga na dat je in de limiet $|x| \to \infty$ op het veld van een puntlading uitkomt.
   (c) Gebruik de symmetrie van het probleem om het antwoord van onderdeel b te veralgemeniseren tot alle punten $(x, y, 0)$ in het $x - y$ vlak. Ga na dat je in de limiet $L \to \infty$ het antwoord van onderdeel a terugvindt.

2. De magnetische energie U_M van de tijdsonafhankelijke stroomverdeling $\vec{\jmath}(\vec{r})$ en vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ is gegeven door

   $$U_M = \frac{1}{2}\int \vec{\jmath}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})\, d\vec{r}.$$

   (a) Leid af dat U_M niet verandert ten gevolge van een willekeurige ijktransformatie.

   In sommige materialen verschilt de magnetische permeabiliteit μ van de waarde μ_0 in het vacuüm en kan bovendien plaatsafhankelijk zijn. Dan luidt de wet van Ampére

   $$\mathrm{rot}\left[\frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu(\vec{r})}\right] = \vec{\jmath}(\vec{r}).$$

   (b) Combineer de twee bovenstaande vergelijkingen om een uitdrukking af te leiden voor U_M in termen van $\vec{B}$ en μ.
   (c) Door een cylindervormige spoel (straal a, lengte L, N windingen) loopt een stroom I. De spoel is gevuld met een materiaal met uniforme μ. Bereken de magnetische energie van de spoel.

3. *(a)* Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat elektromagnetische golven in vacuüm transversaal zijn.
   (b) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat elektromagnetische golven in vacuüm zich voortplanten met snelheid $(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$.
   (c) Een vlakke elektromagnetische golf in vacuüm heeft zowel een elektrische als een magnetische energiedichtheid. Bereken de verhouding van deze twee energiedichtheden.

4. Een zeer dunne, oneindig lange draad (lading λ per lengte-eenheid) ligt langs de x-as in inertiaalstelsel S. De draad beweegt met snelheid v in de x-richting (dus evenwijdig aan zichzelf). In het meebewegende stelsel S' is de draad in rust.
   (a) Bereken de lading λ' per lengte-eenheid in stelsel S'. Leg een verband tussen je resultaat en de relativistische Lorentzcontractie.

In stelsel S' is het elektrische veld (in cylindercoördinaten)

$$\vec{E}'(\vec{r}\,') = \hat{R}' \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 R'}.$$

(b) Maak een Lorentztransformatie van S' naar S en bereken $\vec{E}(\vec{r})$ in stelsel S. Waarom hangt het resultaat niet af van v?
(c) Bereken eveneens door een Lorentztransformatie het magnetische veld $\vec{B}(\vec{r})$ in stelsel S. Interpreteer het resultaat in het kader van de magnetostatica.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 23 FEBRUARI 2004, 10–13 UUR.

1. Een zeer dunne, oneindig lange draad ligt langs de z-as. Door de draad loopt een stroom I.
   (a) Bereken grootte en richting van het magnetische veld $\vec{B}$ buiten de draad.

   We willen nu de eindige lengte L van de draad in rekening brengen. Een eventuele tijdsafhankelijkheid van de stroom mag je verwaarlozen. Veronderstel dat de draad zich uitstrekt van $z = -L/2$ tot $z = +L/2$.
   (b) Hoe luidt, volgens de wet van Biot en Savart, de integraalformule voor $\vec{B}(\vec{r})$? Geef met behulp van een tekening aan wat de gebruikte symbolen betekenen.
   (c) Bereken grootte en richting van $\vec{B}$ in het punt $(x, 0, 0)$ op de x-as. De volgende integraal is gegeven:

   $$\int (1 + u^2)^{-3/2}\, du = u(1 + u^2)^{-1/2}.$$

   Ga na dat je in de limiet $L \to \infty$ het antwoord van onderdeel a terugvindt.

2. Twee tegengestelde ladingen q en $-q$ bevinden zich, respectievelijk, op de punten $(0, 0, d/2)$ en $(0, 0, -d/2)$ langs de z-as.
   (a) Wat is de elektrostatische potentiaal Φ in een willekeurig punt $(0, 0, z)$ op de z-as?
   (b) Veronderstel nu dat $|z| \gg d$. Gebruik een Taylor-reeksontwikkeling om de potentiaal uit onderdeel a te benaderen. Met welke macht van z valt de potentiaal af?
   (c) Gebruik het antwoord uit onderdeel b om de z-component van het elektrische veld op de z-as te benaderen. Wat kun je zeggen over de x en y-componenten?

3. Beschouw een isolerend materiaal (stroom is nul) waarin de diëlektrische constante een plaatsafhankelijke functie is. In de Maxwellvergelijkingen moet je dan $\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t)$ vervangen door $\varepsilon(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}, t)$. Het materiaal is translatie-invariant is in de z-richting, zodat $\varepsilon(x, y)$ alleen in het $x - y$ vlak varieert. We onderzoeken de voortplanting door dit materiaal van een elektromagnetische golf die in de z-richting gepolariseerd is. Dat wil zeggen, het elektrische veld $\vec{E}$ wijst in de z-richting.
   (a) Leid af, dat het magnetische veld $\vec{B}$ van deze elektromagnetische golf loodrecht staat op het elektrische veld.

   Veronderstel dat de elektromagnetische golf monochromatisch is (frequentie ω). We gebruiken de complexe notatie

   $$\vec{E}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\,\{\vec{\mathcal{E}}(x, y)e^{i\omega t}\}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\,\{\vec{\mathcal{B}}(x, y)e^{i\omega t}\}.$$

   (b) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat $\vec{\mathcal{E}}(x, y)$ voldoet aan een differentiaalvergelijking van de vorm

   $$\Delta\vec{\mathcal{E}}(x, y) + f(x, y)\vec{\mathcal{E}}(x, y) = 0.$$

   (Deze vergelijking heet de Helmholtzvergelijking.) Hoe hangt $f(x, y)$ af van $\varepsilon(x, y)$? Ook de Poyntingvector $\vec{S} = (1/\mu_0)\vec{E} \times \vec{B}$ schrijven we in complexe notatie:

   $$\vec{S}(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\,\{\vec{\mathcal{S}}(x, y)e^{i\omega t}\}.$$

   (c) Leid af dat $\vec{\mathcal{S}} = (i/2\mu_0\omega)\nabla|\vec{\mathcal{E}}|^2$.

4. De ladingsdichtheid maal de lichtsnelheid $c\rho$ en de stroomdichtheid $\vec{j}$ vormen samen een viervector.
(a) Wat houdt deze bewering in?
(b) Bediscussiëer de relatie van deze viervector tot de viervector $(\gamma c, \vec{\eta})$ van de eigensnelheid.
(c) Toon aan dat de wet van behoud van lading

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}$$

relativistisch invariant is.

Tentamen Elektromagnetisme II, 17 januari 2005, 14–17 uur.

1. Een coaxiaalkabel bestaat uit twee concentrische geleidende cylinders. De binnencylinder heeft straal a, de buitencylinder heeft straal b en $L \gg a, b$ is de lengte van de kabel. Beide cylinders zijn uniform geladen. De totale lading op de binnencylinder is Q en op de buitencylinder $-Q$.
   (a) Bereken grootte en richting van het elektrische veld tussen de beide cylinders, alsook buiten de buitenste cylinder.
   (b) Bereken het potentiaalverschil V tussen de cylinders en geef aan welke van de twee cylinders de hoogste potentiaal heeft.

   Door elk van beide cylinders loopt een stroom, van gelijke grootte maar tegengesteld van richting (I door de binnencylinder, $-I$ door de buitencylinder).
   (c) Bereken het magnetische veld tussen de beide cylinders, alsook buiten de buitenste cylinder. Geef de richting in een tekening aan.
   (d) Welke vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ correspondeert met dit magnetische veld?

2. Een vlakke elektromagnetische golf (frequentie ω) plant zich voort in de positieve z-richting door een metaal met specifiek geleidingsvermogen σ. (U mag gebruikmaken van de wet van Ohm $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.) We veronderstellen dat het metaal de hele ruimte vult.
   (a) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat de elektrische en magnetische velden in het x-y vlak liggen en loodrecht op elkaar staan.

   We zoeken een oplossing van de vorm

   $$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x}\,\mathrm{Re}\,\{E(z)e^{i\omega t}\},$$
   $$\vec{B}(\vec{r}, t) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\,\{B(z)e^{i\omega t}\}.$$

   (b) Leid af de differentiaalvergelijking

   $$\frac{d^2}{dz^2}E(z) = \gamma^2\omega^2 E(z).$$

   Door welke uitdrukking wordt de complexe constante γ gegeven?
   (c) Los de differentiaalvergelijking op en bepaal $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Schrijf de oplossing uit door $\gamma = \alpha + i\beta$ op te splitsen in een reëel en imaginair deel. (U hoeft α en β niet expliciet te bepalen en mag veronderstellen dat $\alpha > 0$.)
   (d) Druk de fasesnelheid van de golf uit in termen van ω, α, β; doe hetzelfde voor de indringdiepte.

3. Op het college hebben we afgeleid dat de elektromagnetische potentialen V en $\vec{A}$ in de aanwezigheid van stromen en ladingen voldoen aan de inhomogene golfvergelijking, mits we de *Lorentzijk* kiezen. We kiezen nu een andere ijk, de zogenaamde *Coulombijk*, gedefiniëerd door

   $$\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0.$$

   (a) Beargumenteer waarom de Coulombijk zowel V als $\vec{A}$ uniek vastlegt. U mag veronderstellen dat de potentialen naar nul gaan in het oneindige.
   (b) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, aan welke twee gekoppelde

vergelijkingen V en $\vec{A}$ voldoen.
(c) Toon aan dat $V = 0$ in vacüum. Volgt hieruit dat $\vec{E} = 0$ in vacüum? Zo ja, waarom, zo neen, waarom niet.

4. In inertiaalstelsel S wordt een elektromagnetische golf in vacüum beschreven door

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \hat{z}E_0\cos(kx-\omega t), \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= -\hat{y}(E_0/c)\cos(kx-\omega t). \end{aligned}$$

De golf beweegt met snelheid $c = \omega/k$ in de x-richting. Een ander inertiaalstelsel S' beweegt ten opzichte van S met een snelheid v in de x-richting.
(a) Gebruik de Lorentztransformatie van de elektrische en magnetische velden om $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ in stelsel S' te berekenen.
(b) Gebruik de Lorentztransformatie van ruimte en tijd om $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ te schrijven als functie van x' en t' (in plaats van als functie van x en t). Ga na dat de voortplantingsnelheid van de golf in stelsel S' nog steeds gelijk is aan c.
(c) Interpreteer het verschil in frequentie van de golf in de twee inertiaalstelsels in termen van een "Dopplereffect voor licht".[2]

[2]Ter informatie, het Dopplereffect voor geluid is het verschijnsel dat de sirene van een ambulance die langsrijdt eerst stijgt in toonhoogte en vervolgens, na het passeren, in toonhoogte daalt.

Tentamen Elektromagnetisme II, 16 februari 2005, 14–17 uur.

1. Een eenvoudig model voor de elektrostatische potentiaal in een atoom luidt (in bolcoördinaten):

$$V(\vec{r}) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/a}.$$

In deze formule duidt Ze de lading van de atoomkern aan en is a een maat voor de uitgestrektheid van de elektronenwolk om de kern.
(a) Bereken het bijbehorende elektrische veld.
(b) Leid af, dat het atoom neutraal is.
(c) Bereken de ladingsdichtheid $\rho(\vec{r})$ van de elektronenwolk.

2. *(a)* Een lange cylindrische spoel (straal a) omvat een magnetische flux Φ. Bereken de vectorpotentiaal $\vec{A}$ buiten de spoel. Ga na dat het bijbehorende magnetische veld gelijk is aan nul.
(b) Bewijs dat het onmogelijk is om een ijktransformatie uit te voeren zodanig dat $\vec{A} = 0$ buiten de spoel.
(c) Meer in het algemeen wordt de vectorpotentiaal $\vec{A}$ ten gevolge van een tijdsonafhankelijke stroomdichtheid $\vec{j}$ gegeven door de integraalformule

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{r}\,' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

Ga na dat deze vectorpotentiaal voldoet aan de ijk $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

3. Het elektrische veld van een elektromagnetische golf in vacuüm is gegeven door

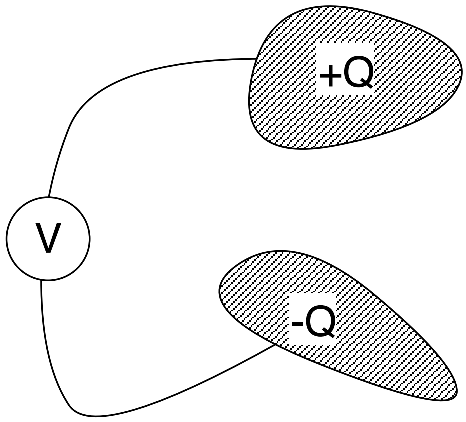
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}\left\{\hat{x}E_1 e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y}E_2 e^{i(kz-\omega t)}\right\}$$

De coëfficiënten E_1 en E_2 zijn complexe getallen.
(a) Bereken (m.b.v. de Maxwellvergelijkingen) het bijbehorende magnetische veld $\vec{B}$. Welke hoek maakt $\vec{E}$ met $\vec{B}$?
(b) Bereken de energiestroomdichtheid, gemiddeld over 1 periode.
(c) De vector $\vec{E}$ beschrijft als functie van de tijd een kromme in het $x - y$ vlak. Voor welke keuze van E_1 en E_2 is de kromme een cirkel? (Men spreekt in dat geval van een “circulair gepolariseerde” golf.)

4. Beschouw twee inertiaalstelsels S en S'. Het stelsel S' beweegt ten opzichte van S met een snelheid v_R in de x-richting.
(a) Bereken, uitgaande van de Lorentztransformatie, hoe de drie componenten v_x, v_y, v_z van de snelheid transformeren bij overgang van S naar S'.
(b) Is het mogelijk om de snelheid uit te breiden tot een viervector? Zo ja, wat is dan de vierde component; Zo nee, waarom niet.
(c) Een deeltje beweegt in stelsel S met de lichtsnelheid c in de y-richting. Leid af dat de grootte van de snelheid in stelsel S' nog steeds gelijk is aan c.
Let op: de snelheid van het deeltje staat loodrecht op v_R.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 16 JANUARI 2006, 14–17 UUR.

1. Een condensator bestaat uit twee tegengesteld geladen geleidende platen (lading $\pm Q$) die door een batterij op een potentiaalverschil V worden gehouden (zie figuur).



(a) Schets de elektrische veldlijnen tussen de geleiders. Geef de richting van het elektrische veld $\vec{E}$ aan met pijlen. Welke hoek maken de veldlijnen met de geleiders en waarom?

(b) De capaciteit van de condensator is gegeven door $C = Q/V$. Leid af, m.b.v. de wet van Gauss, dat

$$C = \epsilon_0 \left| \frac{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l}} \right| .$$

De oppervlakte-integraal in de teller strekt zich uit over het oppervlak S van één van beide geleiders en de lijnintegraal in de noemer loopt langs een pad $\mathcal{L}$ van het oppervlak van de ene geleider naar het oppervlak van de andere geleider.

(c) Leid af dat de elektrostatische energie U van de condensator is gegeven door $U = \frac{1}{2}QV$. Leg uit, waarom hieruit volgt dat

$$\int_{\mathcal{V}} |\vec{E}|^2 dV = \left| \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right| \left| \int_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| .$$

(De volume-integraal strekt zich uit over de ruimte $\mathcal{V}$ tussen de condensatorplaten.)

(d) Veronderstel dat de ruimte tussen de condensatorplaten zelf een zwakke geleider is, met stroomdichtheid $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Het specifieke geleidingsvermogen σ is zo klein dat de elektrische veldlijnen niet verstoord worden. Bereken de totale stroom I tussen de condensatorplaten en laat zien dat de weerstand $R = V/I$ gerelateerd is aan de capaciteit C door

$$RC = \epsilon_0/\sigma.$$

(U mag nog steeds veronderstellen dat de diëlektrische constante gelijk is aan ϵ_0.)

2. In een oneindig grote vlakke plaat in het $x - y$ vlak loopt een tijdsafhankelijke uniforme stroom in de y-richting. De oppervlaktestroomdichtheid is $\vec{j} = f(t)\hat{y}$. Gegeven is dat $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$, d.w.z. in het verre verleden was de stroom nul.

(a) Ook de ladingsdichtheid was nul in het verre verleden:
$\lim_{t\to-\infty}\rho(t) = 0$. Bewijs nu dat $\rho(t) = 0$ voor alle t, d.w.z. de plaat blijft ongeladen.
(b) Schrijf de vectorpotentiaal $\vec{A}$ op het punt $\vec{r} = (0,0,z)$ buiten de plaat als een integraal over de geretardeerde stroom in de plaat. Hoe hangt $\vec{A}$ af van x en y?
(c) Gebruik cylindercoördinaten om te bewijzen dat

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \hat{y}\frac{\mu_0 c}{2}\int_0^\infty du\, f(t-u-|z|/c).$$

(d) Bereken de bijbehorende elektrische en magnetische velden $\vec{E}$ en $\vec{B}$ buiten de plaat. Geef in een figuur de richtingen aan boven en onder de plaat.
(e) De berekende elektrische en magnetische velden vormen een vlakke golf, die zich vanuit de plaat in de positieve en negatieve z-richting voortplant. Toon aan dat deze golf zich met de lichtsnelheid c voortplant. ***Opmerking:*** *als onderdeel (d) niet gelukt is, dan mag u dit ook in het algemeen aantonen, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen.*

3. *(a)* Leid af, uitgaande van de Lorentztransformatieregels voor t en $\vec{r}$, de transformatieregels voor $\partial/\partial t$ en $\partial/\partial\vec{r}$.
(b) Bewijs dat het inproduct van twee viervectoren niet verandert bij verandering van inertiaalstelsel.
(c) De homogene golfvergelijking luidt

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(\vec{r},t) - \frac{\partial^2}{\partial\vec{r}^2}f(\vec{r},t) = 0.$$

Bewijs dat deze golfvergelijking dezelfde vorm heeft in elk inertiaalstelsel, mits $v = c$.

Tentamen Elektromagnetisme II, 14 februari 2006, 14–17 uur.

1. Een dunne, oneindig grote plaat in het $x-y$ vlak heeft een oppervlakteladingsdichtheid $\sigma(x) = \sigma_0 \cos kx$, onafhankelijk van y.
(a) Bereken, met behulp van de wet van Gauss, de z-component $E_z(x)$ van het elektrische veld op het oppervlak van de plaat.
(b) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat de potentiaal $\Phi(x,z)$ buiten de plaat voldoet aan de Laplacevergelijking $\Delta\Phi = 0$. Geef de randvoorwaarde op $z = 0$ van Φ in termen van het veld $E_z(x)$ op de plaat.
(c) Vind een oplossing van de Laplacevergelijking en randvoorwaarde van de vorm $\Phi(x,z) = f(z)\cos kx$.

2. In een supergeleider geldt de Londonvergelijking
$$\nabla \times \vec{j}(\vec{r},t) = -\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\vec{B}(\vec{r},t).$$
De grootheid λ is een materiaalafhankelijke parameter. We veronderstellen dat de supergeleider de halfruimte $x > 0$ vult. Op $x = 0$ is een tijdsonafhankelijk magneetveld $\vec{B} = B_0\hat{z}$ aangelegd.
(a) Leid af, dat het stationaire magnetische veld in de supergeleider voldoet aan de vergelijking
$$\Delta\vec{B} = \lambda^{-2}\vec{B}.$$
(b) Los deze vergelijking voor $\vec{B}$ op.
(c) Het magnetische veld kan niet veel verder dan de indringdiepte λ de supergeleider binnendringen. Ook een ideale geleider kent een indringdiepte voor het magnetische veld. Bediscussieer de verschillen tussen ideale geleider en supergeleider.

3. *(a)* Leid af dat de arbeid dW die door elektromagnetische krachten op ladingen en stromen in een tijd dt verricht wordt, gegeven is door
$$\frac{dW}{dt} = \int \vec{E}\cdot\vec{j}\,d\vec{r}.$$
Waarom komt het magnetische veld $\vec{B}$ niet voor in deze formule?
(b) Door een cylindervormige draad (lengte L, straal a) loopt een stroom I, tengevolge van een spanningsverschil V. Bereken het elektrische en magnetische veld op het oppervlak van de draad en bereken vervolgens de Poyntingvector. Geef de richting van de Poyntingvector aan in een figuur.
(c) Gebruik de stelling van Poynting om de toename van de mechanische energie (= warmte) van de draad te berekenen. Vergelijk uw antwoord met een berekening van dW/dt d.m.v. bovenstaande formule.

4. *(a)* Laat zien dat $|\vec{E}|^2 - c^2|\vec{B}|^2$ relativistisch invariant is.
(b) Stel dat het magnetische veld nul is in een bepaald punt in stelsel S. Bestaat er een stelsel S' waarin het elektrische veld nul is in dat punt? Beargumenteer Uw antwoord.
(c) Stel dat het elektrische en magnetische veld loodrecht op elkaar staan in een bepaald punt in stelsel S. Bewijs dat ze dan ook loodrecht op elkaar staan in dat punt in elk ander stelsel S'.

Tentamen Elektromagnetisme II, 22 januari 2007, 14–17 uur.

1. De continuïteitsvergelijking luidt

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\nabla \cdot \vec{\jmath}.$$

(a) Leid deze vergelijking af uit de Maxwellvergelijkingen.
(b) Laat zien, met behulp van de stelling van Gauss, dat uit deze vergelijking volgt dat lading behouden is.
(c) Gegeven is voor $t > 0$ de stroomdichtheid $\vec{\jmath}(\vec{r}, t) = j_0 \vec{r} e^{-atr^2}$, in bolcoördinaten, met constanten j_0 en $a > 0$. Bereken $\rho(\vec{r}, t)$.

2. Een bewegende stroomkring (met snelheid $\vec{v}$ die klein is t.o.v. de lichtsnelheid) heeft omtrek $C(t)$ en omsluit een oppervlak $S(t)$. De tijdsafhankelijke elektrische en magnetische velden voldoen aan de integraalvergelijking

$$-\frac{d}{dt}\int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{C(t)} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \equiv \mathcal{E}(t).$$

[De grootheid $\mathcal{E}$ heet de elektromotorische kracht.]
(a) Leid deze integraalvergelijking af met behulp van de Maxwellvergelijkingen.

De magnetische flux $\Phi(t)$ door de stroomkring is gegeven door $\Phi(t) = L(t)I(t)$, met $L(t)$ de coëfficient van zelfinductie en $I(t)$ de stroom door de kring. Tevens geldt dat $\mathcal{E}(t) = R(t)I(t)$ met $R(t)$ the weerstand van de kring.
(b) Leid af de differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dt}L(t)I(t) = -R(t)I(t).$$

Bepaal de oplossing als de tijdsafhankelijkheid van L en R verwaarloosd mag worden. [Gegeven is dat $I(0) = I_0$.]

Als er een batterij [met spanning $V(t)$] wordt aangesloten op de stroomkring, dan verandert de differentiaalvergelijking in

$$L\frac{d}{dt}I(t) = V(t) - RI(t).$$

(We verwaarlozen weer de tijdsafhankelijkheid van L en R.)
(c) Veronderstel een wisselspanning $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Beargumenteer wat de hoogste frequentie is waarmee je de stroomkring aan kan drijven.

3. Een elektromagnetisch veld is gegeven door de potentialen

$$\Phi(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \cos(kz - \omega t),$$

voor een constante vector $\vec{A}_0 = (A_{0x}, A_{0y}, A_{0z})$.
(a) Bereken de bijbehorende elektrische en magnetische velden.
(b) Bereken de bijbehorende ladings- en stroomdichtheden.
(c) Leid af dat, indien lading en stroom overal nul zijn, er moet gelden $A_{0z} = 0$ en $\omega = ck$.

4. De Lorentztransformatie luidt

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \;\; ct' = \gamma(ct - \beta x), \;\; y' = y, \;\; z' = z,$$

met $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ en $\beta = v/c$.
(a) Leid af dat de lichtsnelheid invariant is onder Lorentztransformatie.
(b) Leid af dat de Lorentztransformatie ook geschreven kan worden als

$$x' + ct' = e^{-\theta}(x + ct), \;\; x' - ct' = e^{\theta}(x - ct), \;\; y' = y, \;\; z' = z,$$

met $\tanh\theta = \beta$.
(c) Voer twee opeenvolgende Lorentztransformaties uit, eerst met snelheid v_1 en vervolgens met snelheid v_2 (steeds in de x-richting). Laat zien dat dit *niet* hetzelfde is als een enkele Lorentztransformatie met snelheid $v_{\text{totaal}} = v_1 + v_2$. Wat is in plaats daarvan de juiste relatie tussen v_{totaal} en v_1, v_2?
U mag gebruik maken van de formule $\tanh(x+y) = (\tanh x + \tanh y)/(1 + \tanh x \tanh y)$.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 19 MAART 2007, 14–17 UUR.

1. Het statische magnetische veld $\vec{B}$ heeft cartesische componenten

   $$\vec{B} = b_0(x, -y, 0).$$

   Er is geen elektrisch veld.
   (a) Laat zien dat dit magnetische veld voldoet aan de Maxwellvergelijkingen in vacuüm. Schets de magnetische veldlijnen.
   (b) Een waarnemer beweegt vanaf het punt $(x_0, y_0, 0)$ met snelheid v langs de z-as (dus niet langs de x-as). Welk elektrisch veld neemt hij waar? Schets de elektrische veldlijnen.
   (c) Bereken het elektrische potentiaalverschil dat deze waarnemer zou meten tussen zijn positie en het punt $(0, 0, 0)$.

2. We onderzoeken de ijkvergelijking

   $$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi.$$

   Als we $v = c$ kiezen dan krijgen we de Lorentzijk die op het college is behandeld, maar hier willen we een willekeurige v kiezen.
   (a) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat de elektrische potentiaal Φ in deze ijk voldoet aan de inhomogene golfvergelijking

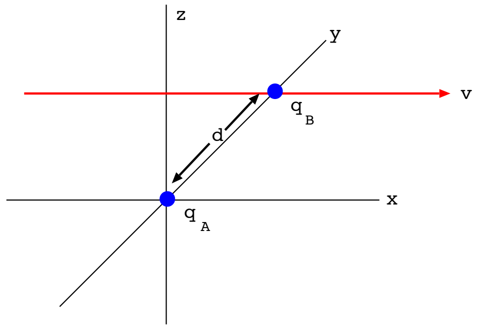
   $$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\Phi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi = -\rho/\varepsilon_0.$$

   (b) Met welke snelheid plant een verstoring van Φ zich voort? Beargumenteer waarom de keuze $v > c$ niet tot een tegenspraak leidt met het principe van Einstein, dat informatie zich niet sneller kan voortplanten dan met de lichtsnelheid.
   (c) Geef de algemene oplossing van $\Phi(\vec{r}, t)$ als een integraal over $\rho(\vec{r}, t)$. (Leg uit wat de gebruikte symbolen betekenen.)

3. Beschouw een neutraal medium in het gebied $z > 0$ met geleidingsvermogen σ, dus $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Gegeven is dat het elektrische veld $\vec{E}$ als functie van de tijd oscilleert met frequentie ω en bovendien onafhankelijk is van x en y. In complexe notatie kunnen we dus schrijven $\vec{E} = \mathrm{Re}\,\vec{\mathcal{E}}(z)e^{i\omega t}$.
   (a) Leid af, uitgaande van de Maxwellvergelijkingen, dat $\vec{\mathcal{E}}(z)$ voldoet aan de vergelijking

   $$\frac{d^2}{dz^2}\vec{\mathcal{E}} + \kappa^2\vec{\mathcal{E}} = 0.$$

   Hoe luidt de relatie tussen κ, σ en ω?
   (b) Wat is de oplossing met randvoorwaarde $\vec{\mathcal{E}}(0) = \vec{\mathcal{E}}_0$? Geef de bijbehorende uitdrukking voor het elektrische veld $\vec{E}(z, t)$.
   (c) Bereken de indringdiepte in de benadering dat $\omega \ll \sigma/\varepsilon_0$.



4. Lading q_A is in rust in de oorsprong in inertiaalstelsel S. Lading q_B beweegt met snelheid v in de x-richting langs de lijn $y = d$, $z = 0$ (zie figuur). We beschouwen het moment dat q_B de y-as kruist.
(a) Wat is de elektromagnetische kracht $\vec{F}_B$ op q_B in stelsel S?
(b) Bereken de getransformeerde kracht $\vec{F}'_B$ in stelsel S' waarin q_B in rust is.
(c) Bereken ook de kracht $\vec{F}'_A$ op q_A in stelsel S'. Wat impliceert uw antwoord voor de derde wet van Newton (actie = −reactie)?

Tentamen Elektromagnetisme II, 21 januari 2008, 14–17 uur.

1. Voordat Maxwell zijn differentiaalvergelijkingen opschreef, kende men al de wet van Gauss,

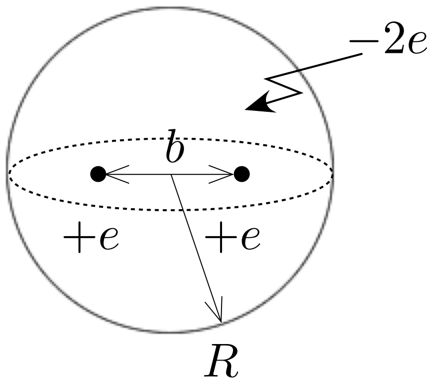
$$\oint_{S_V} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r})\, dV,$$

die de oppervlakte-integraal van het elektrische veld relateert aan de totale omvatte lading. Beschouw nu een elektrisch geladen kubusvormig volume (ribbe a, volume $V = a^3$, totale lading Q), met het centrum in het punt $\vec{r}_0$. De kubus bevindt zich in een elektrisch veld $\vec{E}(\vec{r})$ dat langzaam variëert over de afmeting van de kubus.
(a) Leid af, door middel van een Taylorreeksontwikkeling, dat bij benadering geldt

$$\oint_{S_V} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \approx V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}_0).$$

Wat is de orde van grootte van de verwaarloosde termen?
(b) Leid af, met behulp van beide bovenstaande vergelijkingen, de eerste Maxwell-vergelijking $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$.
(c) Bereken, met behulp van de wet van Gauss, het elektrische veld binnen en buiten een uniform geladen bol (straal R, totale lading Q).

(d) Een eenvoudig model voor het waterstofatoom plaatst twee puntladingen $+e$ in de bol van opgave *(c)*. Door $Q = -2e$ te kiezen is het atoom neutraal. Stel dat het middelpunt van de bol in de oorsprong ligt, en dat de puntladingen symmetrisch op posities $(b/2, 0, 0)$ en $(-b/2, 0, 0)$ geplaatst zijn. Bereken de afstand b van de puntladingen waarbij de totale kracht op elke puntlading gelijk is aan nul.

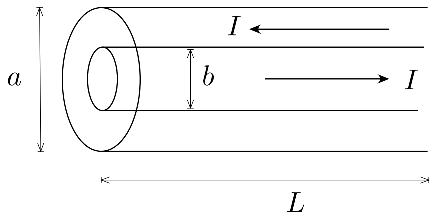


2. De elektrische potentiaal $\Phi(\vec{r}, t)$ en vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r}, t)$ worden niet uniek vastgelegd door de elektrische en magnetische velden $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Een transformatie van Φ en $\vec{A}$ die $\vec{E}$ en $\vec{B}$ onveranderd laat heet ijktransformatie.
(a) Leid af, wat de meest algemene vorm is van een ijktransformatie.
(b) Het is handig gebleken, om Φ en $\vec{A}$ zo te kiezen dat ze voldoen aan de Lorentzijk, $c^2 \operatorname{div} \vec{A} + \partial\Phi/\partial t = 0$. Leid af, aan welke differentiaalvergelijking de ijktransformatie moet voldoen om dit te bewerkstelligen.

(c) In de Lorentzijk ontkoppelen de Maxwellvergelijkingen, zodanig dat je twee gescheiden differentiaalvergelijkingen krijgt voor Φ en $\vec{A}$. Toon dit aan.
(d) Stel, dat Φ en $\vec{A}$ in een bepaald inertiaalstelsel aan de Lorentzijk voldoen. Toon aan, dat ze dan in elk ander inertiaalstelsel ook aan de Lorentzijk voldoen.

3. Een coaxiaalkabel bestaat uit twee concentrische perfekt geleidende cylinders (diameters a en b, lengte L) waartussen een potentiaalverschil V is aangebracht. (De binnenste cylinder heeft de hoogste potentiaal.) Een stroom I door de binnenste cylinder stroomt terug via de buitenste cylinder.

(a) Bereken de lading op beide cylinders.
(b) Bereken de grootte en richting van de Poynting-vector in de ruimte tussen de cylinders.
(c) Bereken de energie die in een tijd Δt van het ene uiteinde van de coaxiaalkabel naar het andere uiteinde wordt vervoerd.



4. Beschouw twee inertiaalstelsels S en S'. Het stelsel S' beweegt ten opzichte van S met een snelheid v_R in de x-richting.
(a) Bereken, uitgaande van de Lorentztransformatie, hoe de drie componenten v_x, v_y, v_z van de snelheid transformeren bij overgang van S naar S'.
(b) Is het mogelijk om de snelheid uit te breiden tot een viervector? Zo ja, wat is dan de vierde component; Zo nee, waarom niet.
(c) Een deeltje beweegt in stelsel S met de lichtsnelheid c in de y-richting. Leid af dat de grootte van de snelheid in stelsel S' nog steeds gelijk is aan c.
Let op: de snelheid van het deeltje staat loodrecht op v_R.

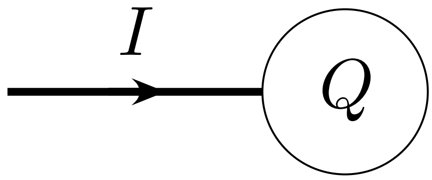
Tentamen Elektromagnetisme II, 17 maart 2008, 14–17 uur.

1. De zogenaamde *verplaatsingstroomdichtheid* $\vec{j}_v$ is gedefiniëerd door

$$\vec{j}_v(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t).$$

We definiëren de som $\vec{J} = \vec{j} + \vec{j}_v$ van $\vec{j}_v$ en de elektrische stroomdichtheid $\vec{j}$.
(a) Leid uit de Maxwellvergelijkingen af, dat $\operatorname{div}\vec{J} = 0$. Hieruit volgt dat $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$ voor elk gesloten oppervlak S.

Een metalen bol wordt door een dunne draad opgeladen. De stroom door de draad is $I(t)$, dus de lading $Q(t)$ op de bol voldoet aan $I = dQ/dt$. Veronderstel dat de lading op elk tijdstip uniform over de bol verdeeld is.



(b) Bereken het elektrische veld $\vec{E}(\vec{r},t)$ buiten de bol.
(c) Bereken $\vec{j}_v$ buiten de bol en ga na dat $\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0$ als S het oppervlak van de bol is.

2. We onderzoeken de één-dimensionale golfvergelijking

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) = 0.$$

De algemene oplossing is $f(x,t) = f_+(x+vt) + f_-(x-vt)$.
(a) Laat zien, dat een functie f van deze vorm inderdaad voldoet aan de golfvergelijking. Wat is de betekenis van de coëfficiënt v? Wat kun je zeggen over de functie f_+ in het speciale geval dat de golf in de positieve x-richting beweegt?
(b) Gegeven zijn de beginvoorwaarden

$$\lim_{t\to 0} f(x,t) = F(x), \quad \lim_{t\to 0}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) = G(x).$$

Bereken f_+ en f_- in termen van F en G.
(c) We definiëren de energiedichtheid U en de energiestroomdichtheid S door

$$U = \frac{1}{2v^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, \quad S = -\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Leid af, uitgaande van de golfvergelijking, dat deze definities voldoen aan de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial x}.$$

Waarom kunnen we laatstgenoemde vergelijking interpreteren als de wet van behoud van energie?

3. Het elektrische veld van een elektromagnetische golf in vacuüm is gegeven door

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{x}E_1 e^{i(kz-\omega t)} + \hat{y}E_2 e^{i(kz-\omega t)}\right\}.$$

De coëfficiënten E_1 en E_2 zijn complexe getallen.
(a) Bereken (m.b.v. de Maxwellvergelijkingen) het bijbehorende magnetische veld $\vec{B}$. Schets in een assenstelsel de vectoren $\vec{E}$, $\vec{B}$ en de voortplantingsrichting van de golf.
(b) Bereken (weer m.b.v. de Maxwellvergelijkingen) de voortplantingssnelheid $v = \omega/k$ van de golf.
(c) Bereken de energiestroomdichtheid, gemiddeld over 1 periode.

4. In de relativiteitstheorie geldt de tweede wet van Newton in de vorm

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

maar *niet* in de vorm

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

(a) Leg uit wat het verschil is tussen deze twee vergelijkingen. Waarom verdwijnt dit verschil bij niet-relativistische snelheden?
(b) Stel een deeltje is in rust in inertiaalstelsel S. We beschouwen nu een tweede inertiaalstelsel S', wat ten opzichte van S met snelheid v_{R} in de x-richting beweegt. Bereken de kracht $\vec{F}'$ op het deeltje in stelsel S', gegeven de kracht $\vec{F}$ in stelsel S.
(c) Toon aan dat de vector $\vec{K} = (1 - |\vec{v}|^2/c^2)^{-1/2}\,\vec{F}$ uit te breiden is tot een viervector.

TENTAMEN ELEKTROMAGNETISME II, 19 JANUARI 2009, 14–17 UUR.

1. Een bol met straal a heeft de volgende ladingsverdeling:

$$\rho_0(\vec{r}) = \begin{cases} C_0 r & \text{voor } r \leq a, \\ 0 & \text{voor } r > a. \end{cases}$$

(a) Bereken het elektrische veld $\vec{E}_0(\vec{r})$ en de potentiaal $\Phi_0(\vec{r})$ (binnen en buiten de bol). Merk op dat beiden continu zijn op $r = a$.
(b) Ik breng nu extra lading δQ aan op het oppervlak van de bol, uniform uitgesmeerd over het hele oppervlak. Bereken de nieuwe $\vec{E} = \vec{E}_0 + \delta\vec{E}$ en $\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi$. Hoe zit het nu met de continuïteit op $r = a$?
(c) Stel nu dat de oppervlaktelading *niet* uniform is uitgesmeerd. Leid af een relatie tussen de oppervlakteladingsdichtheid σ en de discontinuïteit van het elektrische veld op $r = a$.
(d) Gegeven is dat $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ en $C_0 = 0$. Bereken de totale lading en het dipoolmoment (grootte en richting) van de bol.

2. Een statische stroomverdeling $\vec{j}(\vec{r})$ produceert een vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$, volgens de driedimensionale integraal

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

(a) Stel dat ik alleen de x-component A_x van $\vec{A}$ wil weten. Welke integraal moet ik dan uitvoeren?
(b) Leid af, dat $\vec{A}$ voldoet aan de ijk $\operatorname{div} \vec{A} = 0$.
(c) Als de stroomdichtheid $\vec{j}$ alleen ongelijk aan nul is in een dunne draad, dan kun je de driedimensionale volume-integraal vereenvoudigen tot een ééndimensionale lijn-integraal. Laat zien hoe. Verduidelijk uw antwoord door in een figuur aan te geven wat de gebruikte symbolen betekenen.
(d) Veronderstel nu, dat $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ook van de tijd afhangt. Wat wordt dan de integraalformule voor $\vec{A}(\vec{r}, t)$? (Geef weer aan wat de gebruikte symbolen betekenen.) Welke ijk heeft u verondersteld?

3. Een monochromatische, lineair gepolariseerde, vlakke elektromagnetische golf in vacuüm heeft elektrisch veld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x}\, E_0 \cos[\omega(z/c - t) + \alpha].$$

De symbolen E_0, ω, c, α zijn constanten, t geeft de tijd weer en $\vec{r} = (x, y, z)$ de plaats.
(a) Bereken, met behulp van de Maxwellvergelijkingen, het bijbehorende magnetische veld. Geef in een tekening de richting van $\vec{E}$ en $\vec{B}$ weer, alsook de voortplantingsrichting van de golf.
(b) Bereken grootte en richting van de energiestroomdichtheid $\vec{J}$, gemiddeld over één periode van de golf. Wat is de eenheid van $\vec{J}$?
(c) Bereken de energiedichtheid U van het elektromagnetische veld (eveneens gemiddeld over één periode). Wat is de eenheid van U?
(d) Leg uit, waarom de relatie $|\vec{J}| = Uc$ energiebehoud uitdrukt.

4. Een puntlading q beweegt met snelheid v langs de x-as. Op tijdstip $t = 0$ is de puntlading in de oorsprong, z'n coördinaten zijn dus $\vec{r}_q = (vt, 0, 0)$.
(a) Maak een Lorentztransformatie naar een stelsel waarin de puntlading in rust is, en bereken het elektrische veld $\vec{E}'$ en het magnetische veld $\vec{B}'$ in dat stelsel.
(b) Transformeer nu terug naar het oorspronkelijke stelsel. Wat vindt u voor $\vec{E}(\vec{r}, t)$?
(c) Maak een schets van het elektrische vectorveld rond de puntlading. In welke richting is het veld 't grootst?
(d) Een waarnemer zit in het punt $P = (0, 0, d)$ (dus op de z-as, op een afstand d van de oorsprong). Teken in een grafiek hoe de verschillende componenten van $\vec{E}$ in het punt P als functie van de tijd variëren als de puntlading de oorsprong passeert.

Tentamen Elektromagnetisme II, 16 maart 2009, 14–17 uur.

1. We beschouwen een systeem van N geleiders met ladingen $Q_1, Q_2, \ldots Q_N$. Het systeem is als geheel neutraal, dus $\sum_{i=1}^{N} Q_i = 0$. De elektrostatische potentialen $V_1, V_2, \ldots V_N$ van deze geleiders zijn gerelateerd aan de ladingen door een stelsel van lineaire vergelijkingen,

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} V_j, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

De coëfficienten c_{ij} hangen af van de vorm en onderlinge afstand van de geleiders. Omdat het systeem als geheel neutraal is, geldt $\sum_{i=1}^{N} c_{ij} = 0$.
(a) Beargumenteer, waarom ook geldt dat $\sum_{j=1}^{N} c_{ij} = 0$.
(b) Geef een uitdrukking voor de elektrostatische energie U_e van het systeem, in termen van de potentialen V_i en coëfficienten c_{ij}.
(c) Neem als voorbeeld voor $N = 2$ een condensator met capaciteit C. Druk de vier coëfficienten $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ uit in termen van C.

2. We onderzoeken een golfpijp bestaande uit een holle cylinder van straal a langs de z-as, met ideaal geleidende wanden. Binnen in de golfpijp is vacuum. Een monochromatische TM mode (frequentie ω) heeft een elektrisch veld dat (in cylindercoördinaten) voor $R < a$ gegeven is door

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{z}\,\mathrm{Re}\,\{E(R)e^{ikz-i\omega t}\}.$$

(a) Leid af, dat het bijbehorende magnetische veld transversaal is.
(b) Geef de differentiaalvergelijking en randvoorwaarde waar $E(R)$ aan voldoet.[3]
(c) De oplossing van de differentiaalvergelijking is gegeven door een Besselfunctie,

$$E(R) = \text{constante} \times J_0\left(R\sqrt{(\omega/c)^2 - k^2}\right).$$

Bereken nu de relatie tussen k en ω (de zogenaamde dispersierelatie), voor frequenties waarbij er slechts één propagerende mode in de golfpijp bestaat.[4] Bereken ook de cutoff frequentie (waaronder geen enkele propagerende mode bestaat).

3. In het college hebben we in de elektrodynamica gebruik gemaakt van de Lorentz-ijk. In deze opgave onderzoeken we een andere ijk, de zogenaamde Coulomb-ijk. De Coulomb-ijk luidt

$$\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}, t) = 0.$$

(a) Laat zien dat in de Coulomb-ijk de scalaire potentiaal Φ voldoet aan de Poisson-vergelijking

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r}, t).$$

---

[3] De Laplaciaan in cylindercoördinaten is

$$\Delta E_z = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial E_z}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}.$$

[4] Het eerste nulpunt van de Besselfunctie $J_0(x)$ ligt bij $x = 2.405$.

(b) Wat is de algemene oplossing van deze vergelijking?
(c) De potentiaal Φ reageert instantaan op veranderingen in de ladingsdichtheid ρ. Beargumenteer waarom hier geen sprake is van een schending van het principe van de relativiteitstheorie “dat geen signaal zich sneller kan voortplanten dan met de lichtsnelheid”.

4. *(a)* In inertiaalstelsel S geldt $\vec{B} = 0$, $\vec{E} \neq 0$. Geef de elektrische en magnetische velden $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ in stelsel S', dat ten opzichte van S met snelheid v in de x-richting beweegt. Ga na dat $\vec{E}'$ en $\vec{B}'$ loodrecht op elkaar staan.
(b) Leid af dat $\vec{E} \cdot \vec{B}$ invariant is onder Lorentztransformaties.
(c) Stel dat een waarnemer W het elektrische en magnetische veld loodrecht op elkaar ziet staan in een bepaald punt. Beargumenteer, waarom een waarnemer W', die ten opzichte van W een constante snelheid heeft in een willekeurige richting, het elektrische en magnetische veld ook loodrecht op elkaar ziet staan in datzelfde punt. (U mag veronderstellen dat voor beide waarnemers zowel het elektrische als het magnetische veld ongelijk is aan nul.)

Tentamen Elektromagnetisme II, 16 december 2009, 14–17 uur.

1. Een tijdsonafhankelijk elektrisch veld is gegeven door

$$\vec{E}(x,y,z) = ax\hat{x} + bz\hat{y} + [f(x,y) + cz^2]\hat{z},$$

waarbij a, b, c constanten zijn. Gegeven is bovendien dat $\vec{E} = 0$ in de oorsprong $\vec{r} = 0$.
(a) Bereken de functie $f(x,y)$, gebruik makend van de Maxwellvergelijkingen. Bereken vervolgens de elektrostatische potentiaal Φ.
(b) Bereken, uitgaande van dit elektrische veld, de ladingsdichtheid ρ en vervolgens de totale lading Q die bevat is in de kubus $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$, $0 \le z \le L$.
(c) Stel dat ik de elektrische energie wil weten die in deze kubus zit opgeslagen. Ik zou die kunnen uitrekenen via de formule $U_1 = \frac{1}{2}\int_{\text{kubus}} \rho(\vec{r})\Phi(\vec{r})\, dV$ of via de formule $U_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{kubus}} |\vec{E}(\vec{r})|^2\, dV$. Komt hier hetzelfde uit? Beargumenteer uw antwoord. Indien $U_1 \ne U_2$, welke van beide formules zou ik dan moeten gebruiken?

2. *(a)* Een lange cylindrische spoel (straal a) omvat een magnetische flux Φ. Bereken de vectorpotentiaal $\vec{A}$ buiten de spoel. Ga na dat het bijbehorende magnetische veld gelijk is aan nul.
(b) Bewijs dat het onmogelijk is om een ijktransformatie uit te voeren zodanig dat $\vec{A} = 0$ buiten de spoel.
(c) Meer in het algemeen wordt de vectorpotentiaal $\vec{A}$ ten gevolge van een tijdsonafhankelijke stroomdichtheid $\vec{j}$ gegeven door de integraalformule

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{r}\,' \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

Ga na dat deze vectorpotentiaal voldoet aan de ijk $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

3. In deze opgave onderzoeken we de voortplanting van elektromagnetische golven in de lege ruimte tussen twee perfect geleidende vlakke platen. De onderste plaat is op $z = 0$, de bovenste plaat is op $z = d$. We beschouwen allereerst een TE golf met elektrisch veld van de vorm

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \hat{y}\,\mathrm{Re}\left\{E(z)e^{i(kx-\omega t)}\right\}.$$

(a) Geef de golfvergelijking en de randvoorwaarden waar de functie $E(z)$ aan moet voldoen. Waarom kan deze functie niet ook van y afhangen?
(b) Leid een relatie af tussen golfgetal k en frequentie ω van deze golf.
(c) Een ander soort golf heeft tussen de platen een z-onafhankelijk elektrisch veld van de vorm $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t)$. In welke richting moet de constante vector $\vec{E}_0$ nu wijzen? Wat is nu de relatie tussen k en ω?

4. *(a)* De lading q is invariant onder Lorentztransformaties. Gebruik dit gegeven om af te leiden hoe de ladingsdichtheid ρ van een met snelheid v bewegend voorwerp verschilt ten opzichte van de ladingsdichtheid ρ_0 in het ruststelsel. Hoe valt ρ uit te breiden tot een viervector?
(b) Toon aan, dat de wet van behoud van lading,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{j}(\vec{r},t),$$

relativistisch invariant is (d.w.z. dat deze wet dezelfde vorm heeft in elk inertiaalstelsel).
(c) De relativistische impuls van een deeltje met snelheid $\vec{v}$ en massa m is $\vec{p} = m\vec{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Het foton heeft geen massa ($m = 0$) en beweegt met de lichtsnelheid ($v = c$), dus deze formule geeft $0/0$ en kan niet zonder meer gebruikt worden. Hoe kan de impuls van het foton toch berekend worden, gegeven dat het foton een energie E heeft? Welk experiment zou kunnen aantonen dat licht impuls bezit?

Tentamen Elektromagnetisme II, 28 januari 2010, 14–17 uur.

1. *(a)* Leid uit de Maxwellvergelijkingen af, de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{j}(\vec{r},t).$$

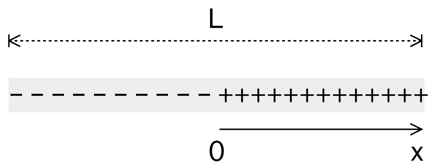
(b) De continuïteitsvergelijking wordt ook wel de wet van behoud van lading genoemd. Leg uit waarom, door deze differentiaalvergelijking te herschrijven tot een integraalvergelijking.
(c) Een tijdsonafhankelijke stroomdichtheid is gegeven door

$$\vec{j}(\vec{r}) = j_0|\vec{r}|^{-3}\vec{r}$$

(j_0 is een constante). Leid af, uitgaande van de wet van behoud van lading, dat deze stroomdichtheid alleen kan bestaan als er een puntbron van lading in de oorsprong aanwezig is.

2. Een zeker molekuul kan benaderd worden door een dunne draad van lengte L, waarbij de ene helft uniform negatief geladen is (totale lading $-Q$) en de andere helft uniform positief geladen is (totale lading $+Q$).

Veronderstel dat het molekuul langs de x-as ligt, met het middelpunt in de oorsprong (zie figuur).



(a) In welke richting wijst het dipoolmoment $\vec{p}$ van het molekuul? Hangt $\vec{p}$ af van de keuze van de oorsprong? (Beargumenteer uw antwoord.)
(b) Bereken de grootte van $\vec{p}$. Is het groter, kleiner, of even groot als het dipoolmoment van puntladingen $+Q$ en $-Q$ op een afstand L van elkaar?
(c) Een elektron bevindt zich op een grote afstand d van de oorsprong (met "groot" bedoelen we $d \gg L$). De kracht $\vec{F}$, die het molekuul op het elektron uitoefent, valt af als $1/d^m$ met een zekere macht m. Bereken m. Wat zou die macht zijn, als het molekuul als geheel geladen was (in plaats van neutraal)? (Beargumenteer wederom uw antwoord.)

3. De wiskundige Euler heeft eens bedacht dat het magnetische veld $\vec{B}(\vec{r},t)$ beschreven kan worden in termen van twee scalaire potentialen $\alpha(\vec{r},t)$ en $\beta(\vec{r},t)$, en wel als volgt:

$$\vec{B} = (\nabla\alpha) \times (\nabla\beta).$$

(a) Laat zien dat we de vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r},t)$ in termen van α en β kunnen schrijven als

$$\vec{A} = \alpha(\nabla\beta).$$

Waarom volgt hieruit dat $\vec{B}$ voldoet aan de Maxwellvergelijking $\nabla \cdot \vec{B} = 0$?
(b) Een andere vectorpotentiaal $\vec{A}'(\vec{r},t)$ is gegeven door

$$\vec{A}' = -\beta(\nabla\alpha).$$

Vind een ijktransformatie $\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \nabla\chi(\vec{r},t)$ die de beide vectorpotentialen relateert.

4. Een puntlading q beweegt met snelheid $\vec{v}$. Op tijdstip t bevindt de lading zich op plaats $\vec{r}_P$. De waarnemer bevindt zich op plaats $\vec{r}$.
   (a) Geef de Liénard-Wiechert formules voor de elektrische potentiaal $\Phi(\vec{r}, t)$ en de vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Leg uit hoe en waarom Φ verschilt van de Coulombpotentiaal

$$\Phi_{\text{Coulomb}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_P|}.$$

   Veronderstel in het vervolg van de opgave dat de snelheid $\vec{v}$ onafhankelijk is van de tijd. Dan geldt (zoals we op het college hebben afgeleid door middel van een Lorentztransformatie) dat Φ gegeven wordt door de formule

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_P|} \sqrt{\frac{1}{1 - (v/c)^2 \sin^2\theta}},$$

   waarbij θ de hoek is tussen de vectoren $\vec{v}$ en $\vec{r} - \vec{r}_P$.
   (b) Leid deze formule voor Φ af uit de Liénard-Wiechert potentiaal, voor het speciale geval dat $\theta = 0$ (dus voor het geval dat de puntading in de richting van de waarnemer beweegt). Wat is de bijbehorende $\vec{A}(\vec{r}, t)$?
   (c) Voor dit speciale geval $\theta = 0$ is Φ gelijk aan Φ_{Coulomb}, dus de elektrische *potentiaal* is onafhankelijk van de grootte v van de snelheid van de puntlading. Geldt hetzelfde voor het elektrische *veld*? Schets de elektrische veldlijnen.

5. In inertiaalstelsel S beweegt een puntlading q met snelheid $\vec{v}$ in een uniform magneetveld $\vec{B}$. Er is geen elektrisch veld. De kracht op de puntlading is dus gegeven door de Lorentzkracht, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. In het meebewegende stelsel S' is de puntlading in rust.
   (a) Bereken de kracht $\vec{F}'$ op de puntlading in stelsel S', door middel van Lorentztransformatie van de elektromagnetische velden.
   (b) De relativistische wet van Newton luidt $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Leid af, uit de bekende transformatieregels voor impuls $\vec{p}$ en tijd t, hoe de kracht $\vec{F}$ transformeert als we van stelsel S overgaan naar stelsel S'. Ga na, dat de getransformeerde kracht $\vec{F}'$ dezelfde is als in antwoord *(a)*.