**ELEKTROMAGNETISME II: WERKCOLLEGE 1**

1. Bereken de gradiënt van de volgende functies:

   a) $f\,(x,\,y,\,z) \;=\; x^2 \,+\, y^3 \,+\, z^4$
   b) $f\,(x,\,y,\,z) \;=\; x^2\,y^3\,z^4$
   c) $f\,(x,\,y,\,z) \;=\; e^x\,(\sin y)(\ln z)$

2. De vector $\vec{r}$ heeft lengte $r = |\,\vec{r}\,|$ en richting $\hat{r} \;=\; \vec{r}/r$.
   Laat zien dat

   a) $\vec{\nabla}\, r^2 \;=\; 2\vec{r}$
   b) $\vec{\nabla}\, r^{-1} \;=\; -r^{-2}\,\hat{r}$
   c) Wat is de algemene formule voor $\vec{\nabla} r^n$?

3. Bereken de divergentie en de rotatie van de volgende vectorvelden:

   a) $\vec{v}\,(x,y,z) \;=\; x^2\hat{x} \;+\; 3\,x\,z^2\,\hat{y} \;-\; 2\,x\,z\,\hat{z}$
   b) $\vec{v}\,(x,y,z) \;=\; xy\hat{x} \;+\; 2\,y\,z\,\hat{y} + 3\,x\,z\,\hat{z}$
   c) $\vec{v}\,(x,y,z) \;=\; y^2\hat{x} \;+\; (2\,x\,y \,+\, z^2)\,\hat{y} \;+\; 2\,y\,z\,\hat{z}$

4. a) Bereken het elektrische veld voor de volgende statische ladingsverdelingen:
      I) $\rho(\vec{r}) = \rho_0 x^2/a^2$
      II) $\rho(\vec{r}) = \rho_0(x^2 + y^2)/a^2$
      III) $\rho(\vec{r}) = \rho_0(x^2 + y^2 + z^2)/a^2$

   b) Bereken het magnetische veld voor de volgende stationaire stroomverdelingen:
      I) $\vec{\jmath}(\vec{r}) = \hat{z} j_0 x^2/a^2$
      II) $\vec{\jmath}(\vec{r}) = \hat{z} j_0(x^2 + y^2)/a^2$

5. a) Bereken het elektrische veld binnen en buiten een homogeen geladen bolvormige schil (straal $R$, totale lading $Q$).

   b) Doe hetzelfde voor een massieve bol.

6. Een stroom $I$ stroomt door een lange cylindrische draad (straal $R$). Bereken het magnetische veld binnen en buiten de draad voor twee gevallen:

   a) De stroom is homogeen verdeeld over het buitenste oppervlak van de draad.

   b) De stroomdichtheid is evenredig met de afstand tot de as van de draad.

7. Beschouw een massieve, lange, rechte cilinder met straal $a$ die coaxiaal is omgeven door een holle cilinder met binnenstraal $b$ en buitenstraal $c$.

   a) De cilinders bestaan uit niet-geleidend materiaal. De binnenste is geladen met homogene ladingsdichtheid $\rho_0$. De elektrische veldsterkte in het materiaal van de andere is radieel gericht en constant in grootte. Bepaal welke ladingsverdeling in de holle cilinder hiervoor nodig is.

   b) De cilinders bestaan uit geleidend materiaal. De binnenste draagt een uniforme stroomdichtheid $\vec{\jmath}_o$. Het magnetische veld in de buitenste is tangentieel gericht en constant in grootte. Bepaal de hiervoor benodigde stroomverdeling in de buitenste cilinder.

## ELEKTROMAGNETISME II: WERKCOLLEGE 2

1. Schrijf de wet van ladingsbehoud om van integrale vorm naar lokale vorm. Leid vervolgens de lokale wet rechtstreeks af uit de Maxwellvergelijkingen in lokale vorm.

2. Beschouw de dipolaire stroomverdeling

$$\vec{\jmath}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{aI_0}{2\pi} \dfrac{3Rz\hat{R} + (2z^2 - R^2)\hat{z}}{(R^2 + z^2)^{5/2}} & \text{voor} \quad r > a \\ \dfrac{I_0}{\pi a^2}\hat{z} & \text{voor} \quad r < a \end{cases}$$

   Laat zien dat zich nergens lading ophoopt.

   N.B. Uit metingen van het magnetische veld, geproduceerd door hersenactiviteit is aangetoond dat dergelijke stroomverdelingen in de hersenen voorkomen.

3. a) Bewijs dat $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ voor een scalaire functie $f$ en een vectorveld $\vec{v}$.

   b) Bewijs dat $\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{\nabla} f)$.

4. a) Schrijf in componenten uit: $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$.

   b) Bereken $(\hat{r} \cdot \vec{\nabla})\hat{r}$.

5. Schrijf uit in termen van gradiënten en divergenties:
   $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})$ en $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B})$.

6. Beschouw twee sinusoidale golven met verschillende amplitude en een phaseverschil:

$$\begin{aligned} f_1(x,t) &= A_1 \sin(kx - \omega t) \\ f_2(x,t) &= A_2 \sin(kx - \omega t + \delta) \end{aligned}$$

   Schrijf $f_1 + f_2$ als een enkele sinusoidale golf.
   Hint: maak gebruik van de complexe notatie.

7. Op het college is afgeleid dat het veld binnen een met wisselspanning bekrachtigde ideale condensator met cirkelvormige platen (straal $a$) gegeven is door

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= E(0)J_0(\frac{\omega R}{c})\cos(\omega t)\hat{z} \\ \vec{B}(\vec{r},t) &= -\frac{E(0)}{c}J_1\left(\frac{\omega R}{c}\right)\sin(\omega t)\hat{\phi} \end{aligned}$$

a) Schets beide veldlijnpatronen voor de tijdstippen $t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{4\omega}$ en $t_3 = \frac{\pi}{2\omega}$ voor het geval dat $\omega = \frac{4c}{a}$.

b) Leid uit het verloop van de veldsterkten de bijbehorende ladings- en stroomverdeling in de platen af.

**ELEKTROMAGNETISME II: WERKCOLLEGE 3**

1. Eén van deze velden kan onmogelijk een elektrostatisch veld zijn. Welke?

   a) $\vec{E}(\vec{r}) = c_1[(xy)\hat{x} + (2yz)\hat{y} + (3xz)\hat{z}]$

   b) $\vec{E}(\vec{r}) = c_2[(y^2)\hat{x} + (2xy + z^2)\hat{y} + (2yz)\hat{z}]$

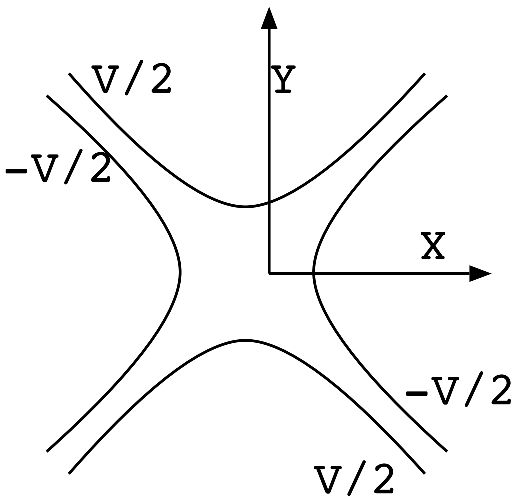
   Bereken voor het elektrostatische veld de potentiaal $\Phi(\vec{r})$, met de oorsprong als referentiepunt. Controleer je antwoord door grad $\Phi$ te berekenen.

2. Bereken de potentiaal binnen en buiten een uniform geladen bol (straal $a$, totale lading $Q$). Gebruik het oneindige als referentiepunt. Bereken grad $\Phi$ en controleer dat je het goede elektrische veld vindt.

3. Bereken de potentiaal op een afstand $R$ van een oneindig lange draad (met lading $\lambda$ per eenheid van lengte). Controleer weer je antwoord.

4. a) Laat zien dat de elektrostatische potentiaal $\Phi(\vec{r})$ rondom een puntlading $q$ aan de Laplace vergelijking $\Delta\Phi = 0$ voldoet.

   b) De ladingsverdeling $\rho(\vec{r})$van een puntlading $q$ ter plaatse $\vec{r}_0$ kan d.m.v. de deltafunctie geschreven worden als $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Beargumenteer dat $\Delta|\vec{r} - \vec{r}_0|^{-1} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.




5. Beschouw het stelsel gevormd door twee paar dunne geleidende platen, waarvan de vorm is gegeven door $y^2 - x^2 = \pm a^2$. Tussen de beide paren wordt een potentiaalverschil $V$ aangelegd.

   a) Bereken m.b.v. de Laplace vergelijking de elektrostatische potentiaal $\Phi$ en de bijbehorende veldsterkte $\vec{E}$ tussen de platen.

b) Schets de equipotentiaalvlakken en het elektrisch veldlijnenpatroon van deze astigmatische elektronenlens.

Hint: Probeer een oplossing te vinden van de vorm $\Phi(\vec{r}) = f(x^2 - y^2)$.

## ELEKTROMAGNETISME II: WERKCOLLEGE 4

1. Beschouw een oneindig lange solenoide waarin een uniform, axiaal gericht magneetveld $\vec{B}_0$ is opgewekt. Bereken de grootte en richting van de vektorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r})$ binnen en buiten de solenoide ($\mathrm{div}\vec{A} = 0$).

2. Een magnetisch veld is gegeven door de vektorpotentiaal $\vec{A} = ay\hat{x} - bx\hat{y}$.

   a) Bereken $\mathrm{div}\vec{A}$ en het magnetische veld $\vec{B}(\vec{r})$.

   b) Schets het verloop van de grootte van $\vec{A}(\vec{r})$ d.m.v lijnen van constante $A$. Geef in deze figuur ook het verloop van de vektor $\vec{A}(\vec{r})$ aan.

   c) Hetzelfde magneetveld kan ook worden gegeven door een vektorpotentiaal $\vec{A}'(\vec{r})$ waarvan de lijnen van constante $A'$ concentrische cirkels zijn. Bepaal $\vec{A}'(\vec{r})$.

3. Stel het magnetische veld $\vec{B}$ is onafhankelijk van $\vec{r}$. Ga na dat de bijbehorende vektorpotentiaal te schrijven is als $\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B})$.
   Wat is div $\vec{A}$?

4. a) Bereken met behulp van de wet van Biot en Savart het magnetische veld op een afstand $z$ van een rechte stroomvoerende draad (lengte $L$, stroom $I$).

   b) Laat zien dat je in de limiet $L \longrightarrow \infty$ het bekende resultaat van het magneetveld van een oneindige draad terugvindt.

5. Beschouw twee coaxiale cirkelvormige stroomkringen van straal $a$ en $b$, op onderlinge afstand $d$. Druk de integraal voor de coëfficiënt van mutuele induktie uit in $a$, $b$ en $d$.

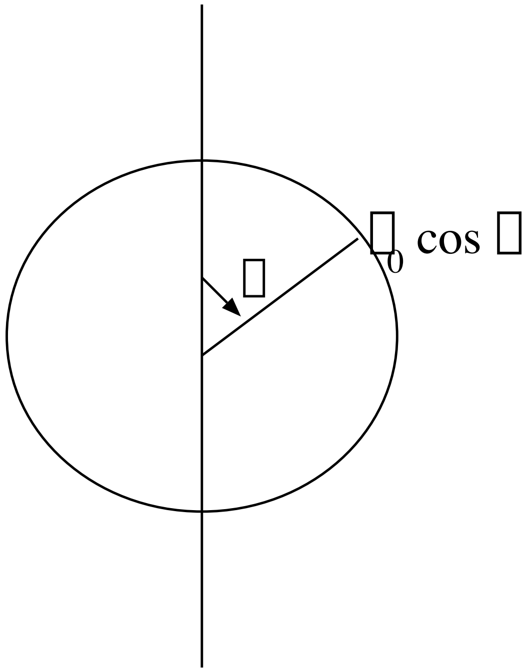
## ELEKTROMAGNETISME II: WERKCOLLEGE 5

1. Beschouw een bol met straal $a$ en oppervlakteladingsdichtheid $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$.

   a) Bereken het elektrisch dipoolmoment $\vec{p}$ van de bol uit de algemene uitdrukking $\vec{p} = \int \vec{r} dq$.

   b) Geef de dipoolbijdrage tot de elektrostatische potentiaal buiten de bol.

   Merk op dat de algemene uitdrukking voor het elektrisch dipoolmoment ook geschreven kan worden als $\vec{p} = \int \vec{r}\rho(\vec{r})dV$.
   In het beschreven voorbeeld is $\rho(\vec{r}) = \sigma_0 \cos\theta\delta(r - a)$.




2. Beschouw het magnetische analogon, d.w.z. een geladen bol met straal $a$ en *uniforme* oppervlakteladingsdichtheid $\sigma_0$, die éénparig roteert met hoeksnelheid $\omega$. De algemene uitdrukking voor magnetisch dipoolmoment $\vec{\mu}$ is $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{\jmath}(\vec{r})dV$.

   a) In het beschreven voorbeeld is $\vec{\jmath}(\vec{r}) = \hat{\phi}\sigma_0\omega a \sin\theta\delta(r - a)$. Ga dit na.

   b) Bereken het magnetisch dipoolmoment.

   c) Geef de dipoolbijdrage tot de vektorpotentiaal buiten de bol.

3. Het elektromagnetische veld in een deel van de ruimte wordt gegeven door de potentialen

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z,t) &= \frac{A_0\omega}{k}\sin(\omega t - kx) \\ \vec{A}(x,y,z,t) &= (\hat{x}+\hat{y})A_0\sin(\omega t - kx) \end{aligned}$$

   a) Bepaal de veldsterkten $\vec{E}(\vec{r},t)$ en $\vec{B}(\vec{r},t)$.

   b) Bepaal de dichtheden van lading en stroom in het betreffende deel van de ruimte. Onder welke voorwaarde(n) zijn deze beide overal nul?

   c) Hetzelfde veld wordt ook beschreven door de potentialen $\Phi'$ en $\vec{A}'$ met $\vec{A}' = \hat{y}A_0\sin(\omega t - kx)$. Bepaal $\Phi'(\vec{r},t)$.

4. Beschouw de homogene golfvergelijking voor $\vec{E}(\vec{r},t)$ en $\vec{B}(\vec{r},t)$, en geef de algemene uitdrukkingen voor $\vec{E}$ en $\vec{B}$ voor het geval we te maken hebben met harmonische vlakke golven die zich in de $z$-richting voortplanten. Neem aan dat $\vec{E}$ en $\vec{B}$ alleen een functie van $z$ zijn. Onder welke voorwaarden hebben we te maken met een lineair, circulair, dan wel elliptisch gepolariseerd elektromagnetisch veld?

## ELEKTROMAGNETISME II: WERKCOLLEGE 6

1. Hoe luidt de inhomogene golfvergelijking voor cilindergolven, d.w.z. golven die zich vanuit een centrale as cilindersymmetrisch uitbreiden?

   Vind m.b.v. de complexe rekenwijze de zich uitbreidende "monochromatische" golfoplossing van het type $\phi(\vec{r}, t) = f(R)e^{-i\omega t}$.

2. Beschouw een puntlading $q$ die met een constante snelheid $v$ langs de $x$-as beweegt. Bepaal de potentialen voor punten op de $x$-as, uitgaande van de algemene oplossing voor $\Phi$ en $\vec{A}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}_1, t) &= \int dV_2 \, \frac{\rho(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c})}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \\ \vec{A}(\vec{r}_1, t) &= \int dV_2 \, \frac{\mu_0 \vec{\jmath}(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c})}{4\pi r_{12}}\end{aligned}$$

   Vergelijk de uitkomst met de Liénard-Wiechert potentialen.

3. Bereken de elektrostatische energie van een bol met straal $r_0$ en lading $Q$ indien

   a) de bol uit geleidend matriaal bestaat.

   b) de lading $Q$ homogeen over de bol is verdeeld.

   Ga voor beide gevallen na of deze energie gelijk is aan de totale veldenergie.

4. a) Hoe verandert de elektrostatische energie $U_e$ met de afstand $a$ tussen de platen van een vlakke plaatcondensator, indien de lading op de platen constant wordt gehouden? Wat volgt hieruit voor de kracht $\vec{F}$ tussen de platen? Druk $\vec{F}$ uit in de elektrische veldsterkte tussen de platen. Randeffekten mogen worden verwaarloosd.

   b) Bereken ook de verandering in $U_e$ met $a$ indien m.b.v. een spanningsbron het potentiaalverschil $V$ tussen de platen constant wordt gehouden. Leidt het verschil in antwoord met de situatie in a) ook tot een andere kracht tussen de platen? Licht Uw antwoord toe.

## ELEKTROMAGNETISME II: WERKCOLLEGE 7

1. Bereken de magnetostatische energie $U_m$ van een coaxiaalkabel waarin gelijke, maar tegengesteld gerichte stromen in binnen- en buitenmantel lopen. Geef een uitdrukking voor de coëfficiënt van zelfinductie $l$. Hoe verandert $U_m$ bij een virtuele toename van de buitendiameter? Bereken vervolgens de druk op binnen- en buitenmantel.

2. Golven die zich langs een golfpijp met rechthoekige doorsnede $a < b$ kunnen voortbewegen zijn geven door

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_a \sin(\pi \frac{z}{b}) \cos\left[\omega t - \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} x\right] \hat{y} \tag{1}$$

   a) Wat zijn de bijbehorende stroomverdelingen in de wand?
   b) Bereken het gemiddelde vermogen dat langs de pijp wordt getransporteerd.
   c) Toon aan dat het energietransport met de groepsnelheid plaatsvindt.

3. Beschouw een perfekt geleidende, cylindrische golfpijp (straal $b$) met een coaxiale, perfekt geleidende binnencylinder (straal $a$).

   a. Bereken het elektrische en magnetische veld van een transversale elektromagnetische golf (een *TEM-golf*), die zich door zo'n *coaxiaal-kabel* voortplant.
   Hint: Zoek een oplossing in cylindercoördinaten, van de vorm
   $\vec{E}(\vec{r}) = E(R)\cos(kz - \omega t)\hat{R}$, $\vec{B}(\vec{r}) = B(R)\cos(kz - \omega t)\hat{\phi}$.
   b. Bereken de fase- en groepsnelheid van de golf. Is er een cutoff-frequentie?
   c. Bereken de ladingsdichtheid $\pm\lambda(z, t)$ (per lengte-eenheid) in de binnen- en buitencylinder. Bereken ook de stroom $\pm I(z, t)$ in de binnen- en buitencylinder.
   d. Bereken het potentiaalverschil $V(z, t)$ tussen binnen- en buitencylinder. Laat zien dat de *capaciteit* $C_0 \equiv \lambda/V$ van de coaxiaal-kabel (per lengte-eenheid) gegeven is door $C_0 = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$. Bereken tenslotte de *impedantie* $Z_0 \equiv V/I$ van de transmissielijn.

## ELEKTROMAGNETISME II: WERKCOLLEGE 8

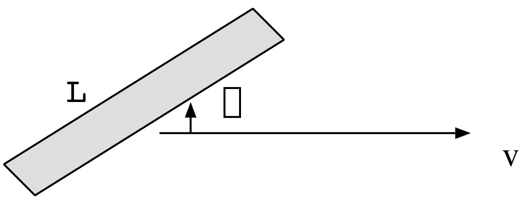
1. (a) Bereken m.b.v. de Maxwell stress-tensor de kracht die twee gelijke ladingen $q$, op afstand $d$, op elkaar uitoefenen. Integreer hiertoe de stress-tensor over het middelloodvlak van beide ladingen.

   (b) Doe hetzelfde nu voor twee tegengestelde ladingen $\pm q$.

2. Een staaf $AB$ beweegt t.o.v. een waarnemer $W$ met een snelheid $\vec{v}$, waarbij de richting van $\vec{v}$ een hoek $\alpha$ met de lengterichting van de staaf maakt. De lengte van de bewegende staaf is $L$. Toon aan dat de rustlengte $L_0$ met $L$ samenhangt als

$$L_0^2 = \frac{\gamma^2 + \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} L^2 \text{ waarin } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

   Onder welke hoek ziet de waarnemer in het ruststelsel de staaf?




3. In een rechte draad (doorsnede $A$) wordt een stroom met sterkte $I$ gedragen door de vrije elektronen. De draad is ongeladen, de negatieve ladingsdichtheid van de vrije elektronen $\rho_e$ wordt geneutraliseerd door de positieve ladingsdichtheid van het rooster $\rho_r$, zodat $\rho = \rho_e + \rho_r = 0$.

   a) Gebruik de transformatie-eigenschappen van de viervector $(c\rho, \vec{\jmath})$ voor de berekening van $\vec{\jmath}'$ en $\rho'$ in stelsel $S'$ dat met de driftsnelheid van de elektronen $\vec{v}_d$ transleert.

   b) Bereken voor stelsel $S'$ de stroomsterkte $I'$ in de draad en de ladingsdichtheid $\lambda'$ per meter draad.

4. Bereken de baan die een deeltje met massa $m$ onder invloed van een constante kracht $F$ aflegt. Veronderstel dat het deeltje in rust is in de oorsprong op $t = 0$.

## ELEKTROMAGNETISME II: WERKCOLLEGE 9

1. Toon aan m.b.v. de transformatieformules voor de afgeleiden, de veldsterkten en de ladingen en stromen dat de eerste Maxwellvergelijking aan het relativiteitsbeginsel voldoet. (Hiermee bedoelen we: als MI t/m MIV in een zeker inertiaalstelsel gelden, dan geldt MI in elk ander inertiaalstelsel.)

2. Bewijs dat het in-product $-a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$ van twee viervectoren $a^\mu$ en $b^\mu$ invariant is onder Lorentztransformaties.

3. Het elektromagnetisch veld in een deel van de ruimte zij gegeven door de potentialen

$$\Phi(\vec{r}, t) = 0 \quad , \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \hat{y} A_0 \sin(\omega t - kx) \tag{3}$$

   a) Bepaal de veldsterkten $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

   b) Bepaal de potentialen voor een inertiaalwaarnemer $W'$ die met snelheid $v_R$ langs de $x$-richting van het oorspronkelijke stelsel beweegt. Bepaal vervolgens de beide veldsterkten. Hoe transformeren de frequentie en de golflengte van deze elektromagnetische golf?

   c) Beantwoord dezelfde vragen voor $v_R$ gericht langs de $y$-richting.

   d) Laat zien dat $(\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ een vier-vektor vormen.

   Veronderstel $\omega/k = c$.