Sonderabdruck aus No. 4/5 Jahrgang 6 der „Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter".

Wie sieht die Curve $y = (-1)^x$ aus?

P. Ehrenfest, Petersburg.

Bestimmt man für alle *rationalen* $x = p/q$ die Werte von y durch die Festsetzung:

$$y = (-1)^x = (-1)^{p/q} = \left[\sqrt[q]{-1}\right]^p \tag{1}$$

so bestätigt man unmittelbar folgende Aussagen:
in $x = 1, 3 \cdots\cdot {}^1/_3, {}^1/_5, {}^3/_5 \cdots\cdot$ allgemein in

$$x = \pm \frac{2n+1}{2m+1} \tag{2}$$

erhält man für y an *reellen* Werten nur: $y = -1$;
in $x = 2, 4 \cdots\cdot {}^2/_3, {}^2/_5, {}^4/_5 \cdots\cdots$ allgemein in

$$x = \pm \frac{2n}{2m+1} \tag{3}$$

erhält man für y an *reellen* Werten nur: $y = +1$;
in $x = {}^1/_2, {}^3/_2 \cdots\cdot {}^1/_4, {}^3/_4, {}^5/_4 \cdots\cdot$ allgemein in

$$x = \pm \frac{2n+1}{2m} \tag{4}$$

erhält man für y überhaupt keinen *reellen* Wert.

Damit sind die *rationalen* Werte von x erschöpft. In jedem noch so kleinen Intervall der x-Axe liegen ∞ viele x-Werte vom Typus (2), ∞ viele vom Typus (3) und ∞ viele vom Typus (4).

Die „Kurve" der reellen Wertepaare (x, y) verläuft also derart, daß für einander beliebig nahe benachbarte rationale Werte von x der zugehörige Kurvenpunkt abwechselnd überhaupt fehlt, oder auf der Geraden $y = +1$ oder auf der Geraden $y = -1$ liegt.

Die Festsetzung (1) bedarf einer Verallgemeinerung, wenn sie auch die *irrationalen* x-Werte umfassen soll. Als natürliche Verallgemeinerung ist folgende Festsetzung anzusehen[1]):

$$y = (-1)^x = [\cos{(2N+1)\pi} + i \sin{(2N+1)\pi}]^x$$

also nach dem Moivre'schen Lehrsatz:

$$y = \cos{(2N+1)x\pi} + i \sin{(2N+1)x\pi} \tag{5}$$

wo N eine beliebige positive oder negative ganze Zahl sein kann.

Wenn man dem x einen bestimmten reellen Wert gibt, N die Werte: $0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdots \pm\infty$ durchlaufen läßt und die entsprechenden y-Werte: $y_0, y_{+1}, y_{-1}, y_{+2}, y_{-2} \cdots\cdot$ in einer pcomlexen $(y = u + iv)$-Ebene aufträgt, so fallen sie alle auf die Peripherie des Einheitskreises um den Anfangspunkt.

Hat x einen *rationalen* Wert: $x = p/q$ so fallen diese ∞ vielen Werte *auf q aequidistante Peripherie-Punkte* mit den Amplituden:

$$\varphi_0 = \frac{p\pi}{q}, \varphi_1 = \frac{3p\pi}{q}, \cdots\cdots \varphi_{q-1} = \frac{(2q-1)p\pi}{q} \tag{6}$$ [2])

d. h auf die Werte, welche auch schon die Festsetzung (1) lieferte.

Hat x einen *irrationalen* Wert, so breiten sich die zugehörigen Werte: $y_0, y_{+1}, y_{-1}, y_{+2}, y_{-2}, \cdots\cdot$ *überall dicht über die Peripherie des Einheitskreises aus.* Unter ihnen lassen sich also solche angeben, die den Werten $y = +1$ und $y = -1$ *beliebig nahe kommen.* Aber es läßt sich keine ganze Zahl N finden für die in (5) der Imaginarteil *exakt* gleich Null sein könnte.

Auf der „Kurve" der reellen Wertepaare (x, y) fehlen also alle Punkte mit irrationalem x.

---

[1]) Vergl. zu dieser Behauptung bei Osgood: Lehrbuch d. Funktiontheorie I pag. 218 und 385 die Ausführungen über „allgemeine Potenz".

[2]) Man bestätigt leicht, daß: $\varphi_q = \varphi_0 + 2\pi$, $\varphi_{q+1} = \varphi_1 + 2\pi$, $\cdots$ also keine neuen Punkte liefern.

Es liegt nun nahe eine geometrische Darstellung zu suchen für alle komplexen $y = u + i v$, welche durch die Gl. (5) der Gesamtheit aller *reellen* x zugeordnet werden[1]); dazu reicht ein dreidimensionaler Raum mit den Koordinaten x, u, v aus.

Gibt man dem N zunächst irgend einen festen Wert und läßt x kontinuierlich von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen, so liefert Gl. (5) die Raumkurve:

$$\begin{aligned} u &= \cos\,(2\,N + 1)\,x\,\pi \\ v &= \sin\,(2\,N + 1)\,x\,\pi \end{aligned} \tag{7}$$

d. h. eine gewöhnliche Schraubenlinie auf dem Zylinder

$$u^2 + v^2 = 1 \tag{8}$$

Sie umspinnt ihn $(2\,N + 1)$ mal während x um 2 Einheiten wächst und durchstößt dementsprechend die (x, u)-Ebene in den Punkten:

$$\begin{aligned} x &= \cdots\cdots \frac{-1}{2\,N+1},\ 0,\ \frac{1}{2\,N+1},\ \frac{2}{2\,N+1},\ \cdots\ 1, \ldots \\ u &= \cdots\cdots \quad -1, \quad +1, \quad -1, \quad +1, \ \ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Läßt man nun noch N die Werte $0, +1, \pm 2, \cdots \pm \infty$ durchlaufen, so erhält man *unendlich viele rechts- und linksgewundene Schraubenlinien mit unbegrenzt wachsenden Umlaufsgeschwindigkeiten.*

Die Gesamtheit der von ihnen gelieferten Durchstoßpunkte (9) setzt die „Kurve" der reellen Wertepaare (x, y) zusammen, von der oben die Rede war[2]).

Jene ∞ vielen Schraubenlinien quellen alle aus dem Punkt: $x = 0, u = 1, v = 0$ hervor und überholen einander derart, daß sie jede Ebene: $x = p/q$ in nur q Punkten durchsetzen. Jede Ebene $x =$ const mit noch so benachbartem *irrationalen* x-Wert durchsetzen sie aber schon in ∞ vielen Punkten!!

Man kann analog die Kurve der reellen Wertepaare (y, x) von

$$y = (+1)^x$$

betrachten: Sie besteht zunächst aus *allen* Punkten der Geraden $y = +1$. Die zu (5) analoge Festsetzung:

$$y = (+1)^x = \cos 2\,N\pi x + i \sin 2\,N\pi x \tag{10}$$

liefert aber dazu noch alle diejenigen Punkte der Geraden $y = -1$ für welche x der Wertereihe (4) angehört[3]).

---

[1]) Es kommt verhältnismäßig häufig vor, daß man — besonders bei gewissen Problemen der analytischen Mechanik — die unabhängige Variable (etwa die Zeit z) ausschließlich reelle Werte durchlaufen läßt, für die abhängige Variable hingegen auch alle komplexen Werte in Betracht nimmt. Für alle diese Fälle ist die angeführte Veranschaulichung verwertbar. — Schon die einfachen Funktionen: $y = u + i\,v = +\sqrt{1 - x^2}$, $y = \log x$, $y = \arcsin x$ liefern vielgestaltige Raumkurven im x, u, v-Raum.

[2]) Würde man sich in der Definition (5) willkürlich auf den Wert $N = 0$ beschränken, so bestände die „Kurve" der reellen Wertepaare (y, x) allein aus folgenden, durch endliche Intervalle getrennten Punkten: $y = \pm 1;\ x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

[3]) Man kann hier die zu (7) analogen Schraubenlinien betrachten und stellt dann leicht fest, daß für $N = 0$ die zugehörige Schraubenlinie in eine Erzeugende des Cylinders (8) degeneriert, in die Gerade: $v = 0, u = +1$. Wenn man aber die Kurve: $y = (+1)^x$ kurzweg mit den Geraden $y = +1$ identifiziert, so heißt das, daß man sich in der Definition (10) auf den Wert $N = 0$ beschränkt. — Stellt man die (5) und (10) analogen Festsetzungen für die allgemeinen Funktion $y = (+a)^x$ auf, wo a reell oder komplex sein mag, so erhält man wieder ∞ viele Kurven, die schraubenartig eine trompetenförmige Rotationsfläche umspinnen. Die Spezialisierung auf $a = e$ liefert also zunächst eine ∞ vieldeutige Funktion: $y = (+e)^x$. Nur erst die willkürliche Beschränkung auf $N = 0$ fürt zu der eindeutigen Funktion $y = e^x$ der allgemein üblichen Auffassung. (Vergl. Osgood.)