

Uitwerking van de opgaven bij werkcollege 1

1. a) $\vec{\nabla} f = (2x, 3y^2, 4z^3)$
 b) $\vec{\nabla} f = xy^2z^3(2yz, 3xz, 4xy)$
 c) $\vec{\nabla} f = e^x(\sin y \ln z, \cos y \ln z, \frac{\sin y}{z})$

2. In poolcoördinaten: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$.

Aangezien $\frac{\partial}{\partial \theta} r^n = 0$ en $\frac{\partial}{\partial \phi} r^n = 0$ blijft alleen de radiële component over:

- a) $\vec{\nabla} r^2 = \frac{\partial}{\partial r} r^2 \hat{r} = 2\vec{r}$
 b) $\vec{\nabla} r^{-1} = \frac{\partial}{\partial r} r^{-1} \hat{r} = -r^{-2} \hat{r}$
 c) $\vec{\nabla} r^n = \frac{\partial}{\partial r} r^n \hat{r} = nr^{n-1} \hat{r} = nr^{n-2} \vec{r}$
3. a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{v} = -6zx\hat{x} + 2z\hat{y} + 3z^2\hat{z}$
 b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = y + 2z + 3x, \vec{\nabla} \times \vec{v} = -2y\hat{x} - 3z\hat{y} - x\hat{z}$
 c) $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 2x + 2y, \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$

4. a) We maken hier gebruik van de wet van Gauss:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV.$$

Kies steeds een integratievolume dat de symmetrie van de dichtheid optimaal uitbuit.

I) $\rho(\vec{r}) = \rho_0 x^2 / a^2$. De ladingsdichtheid is symmetrisch in het vlak $x = 0$. We verwachten daardoor dat $\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\hat{x}$. Kies als integratievolume een balk met één hoekpunt in de oorsprong en breedte x , lengte l en hoogte h . De volume-integraal levert

$$\frac{lh}{\epsilon_0} \int_0^x \rho_0 x'^2 / a^2 dx' = \frac{\rho_0 x^3 lh}{3\epsilon_0 a^2}.$$

Als we stellen $E(0) = 0$ (dit is een arbitraire keuze), dan levert alleen de oppervlakte-integraal over x een bijdrage $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = lhE(x)$. Hiermee vinden we $E(x) = \frac{\rho_0 x^3}{3\epsilon_0 a^2}$.

II) $\rho(\vec{r}) = \rho_0(x^2 + y^2)/a^2 = \rho_0 R^2/a^2$. De ladingsdichtheid is cilindrisch symmetrisch om de z -as. We verwachten $\vec{E}(\vec{r}) = E(R)\hat{R}$. Kies nu als integratievolume een cirkelvormige schijf met hoogte h en straal R om de z -as. Met de wet van Gauss vinden we

$$E(R) \cdot 2\pi Rh = \int_0^R \frac{\rho_0 R'^2}{\epsilon_0 a^2} 2\pi R' h dR'.$$

Dit levert $E(R) = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 a^2}$

III) $\rho(\vec{r}) = \rho_0(x^2 + y^2 + z^2)/a^2 = \rho_0 r^2/a^2$. De ladingsdichtheid is bolsymmetrisch om de oorsprong. We verwachten $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$. Kies nu als integratievolume een bol met straal r en middelpunt in de oorsprong. Met de wet van Gauss vinden we

$$E(r)4\pi r^2 = \int_0^r \frac{\rho_0 r'^2}{\epsilon_0 a^2} 4\pi r'^2 dR'.$$

Dit levert $E(r) = \frac{\rho_0 r^3}{5\epsilon_0 a^2}$

b) We bepalen het magnetische veld uit de wet van Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

I) De stroomdichtheid $\vec{j} = j_0 x^2/a^2 \hat{z}$ is symmetrisch in het vlak $x = 0$. We verwachten voor de magnetische veldsterkte: $\vec{B}(\vec{r}) = B(x)\hat{y}$. Gebruik daarom als integratie-oppervlak een rechthoek in het xy -vlak met één hoekpunt in de oorsprong, breedte x en lengte l . Uit de wet van Ampère vinden we dan

$$B(x) \cdot l = \mu_0 l \int_0^x \frac{j_0 x'^2}{a^2} dx'.$$

Dit levert $B(x) = \frac{\mu_0 j_0 x^3}{3a^2}$.

II) $\vec{j} = j_0(x^2 + y^2)/a^2 \hat{z} = j_0 R^2/a^2 \hat{z}$. Deze stroomdichtheid is cilindrisymmetrisch om de z -as. We verwachten $\vec{B}(\vec{r}) = B(R)\hat{\phi}$. Kies als integratie-oppervlak een cirkelschijf met straal R en normaal \hat{z} . Uit de wet van Ampère:

$$B(R) \cdot 2\pi R = \mu_0 \int_0^R \frac{j_0 R'^2}{a^2} 2\pi R' dR'.$$

Dit levert $B(R) = \frac{\mu_0 j_0 R^3}{4a^2}$.

5. a) Gebruik de Maxwellvergelijkingen in integrale vorm;

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

waarbij S het oppervlak is van het volume V . Aangezien het probleem bolsymmetrisch is, kunnen we stellen dat $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$. De bovenstaande vergelijking wordt dan

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{als } r > R \\ 0 & \text{als } r < R \end{cases}$$

Dus

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{als } r > R \\ 0 & \text{als } r < R \end{cases}$$

- b) Hier is de methode precies het zelfde als boven met als enige verandering dat we nu een ladingsdichtheid $\rho = Q/(4/3\pi R^3)$ hebben. Dus

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{als } r > R \\ \frac{Q}{\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{als } r < R \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{als } r > R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \hat{r} & \text{als } r < R \end{cases}$$

6. a) Gebruik de wet van Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Vanwege de cilindrsymmetrie verwachten we dat $\vec{B}(\vec{r}) = B(r)\hat{\phi}$, waarbij r ditmaal de afstand tot de as van de draad is. Kies als integratie oppervlak een cirkelschijf met straal r en normaal \hat{z} . Als $r < R$, is de flux door de schijf nul, dus is het magnetische veld nul. Als $r \geq R$, is de stroom door het oppervlak gelijk aan I . Dan is

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

- b) De stroomdichtheid is evenredig met de straal: $\vec{j} = j_0 r \hat{z}$. j_0 is een onbekende stroomdichtheid per lengte-eenheid, die we kunnen bepalen uit

$$\int_0^R j_0 r' \cdot 2\pi r' dr' = I. \quad \Rightarrow \quad j_0 = \frac{3I}{2\pi R^3}$$

De stroom door een cirkelschijf met straal $r < R$ is

$$\int_0^r j_0 r' \cdot 2\pi r' dr' = I \left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

Hiermee vinden we

$$B(r) = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi R^3}, \quad r < R.$$

Het magnetisch veld buiten de draad is identiek aan dat in 6a), aangezien de totale omvatte stroom identiek is.

7. a) Wederom een Maxwellvergelijking in integrale vorm:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Aangezien we weten dat $\vec{E} = E_0 \hat{R}$, kunnen we deze stelling toepassen op een cilinder van straal $c \geq R \geq b$ en lengte l :

$$2\pi R l E_0 = l \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \pi a^2 + l \int_b^R \frac{\rho(R')}{\epsilon_0} 2\pi R' dR'$$

Nemen we $R = b$ dan valt de laatste term weg; $E_0 = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 b}$. Tevens kunnen we deze vergelijking naar R differentieren:

$$2\pi l E_0 = 2\pi l \frac{\rho(R)}{\epsilon_0} R$$

Dus

$$\rho(R) = \frac{\epsilon_0 E_0}{R} = \frac{\rho_0 a^2}{2bR}$$

- b) Identiek aan a). Neem de corresponderende Maxwellvergelijking in integrale vorm

$$2\pi R B_0 = \mu_0 j_0 \pi a^2 + \int_b^R \mu_0 j(R') 2\pi R' dR'$$

Dus

$$j(R) = \frac{j_0 a^2}{2bR}$$

Uitwerking van de opgaven bij werkcollege 2

1. De wet van ladingsbehoud in integrale vorm is:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{S_V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

met S_V een gesloten oppervlak dat V omvat.

We werken nu de oppervlakte-integraal om naar een integraal over het volume V met behulp van de stelling van Gauss:

$$\oint_{S_V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV,$$

zodat

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) dV = 0.$$

Omdat dit moet gelden voor een willekeurig volume V , moet de integrand zelf nul zijn, zodat we uiteindelijk de wet van ladingsbehoud in lokale vorm hebben verkregen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

2. Gegeven is de (cilindersymmetrische) stroomdichtheidsverdeling binnen ($r < a$) en buiten ($r > a$) een bol:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{aI_0}{2\pi} \frac{3Rz\hat{R} + (2z^2 - R^2)\hat{z}}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & \text{voor } r > a, \\ \frac{I_0}{\pi a^2} \hat{z} & \text{voor } r < a. \end{cases}$$

Er hoopt zich nergens lading op ($\rho(\mathbf{r}, t) = 0$) als geldt:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 & \text{voor } r > a, \\ \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0 & \text{voor } r < a, \text{ en} \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{r}|_{r \uparrow a} = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{r}|_{r \downarrow a} & \text{d.w.z. er hoopt zich ook} \\ & \text{geen lading aan het bolop-} \\ & \text{pervlak op.} \end{array} \right.$$

Eerst het geval $r < a$:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R j_R + \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad (\text{want } j_\phi \equiv 0.) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{I_0}{\pi a^2} \\ &= 0 \quad \text{dus voor } r < a \text{ is er geen ladingsophoping.}\end{aligned}$$

Nu voor $r > a$:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{aI_0} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \frac{3R^2 z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{2z^2 - R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{6z^3 - 9zR^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{-6z^3 + 9zR^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} \\ &= 0 \quad \text{dus voor } r > a \text{ is er ook geen ladingsophoping.}\end{aligned}$$

Tenslotte moeten we nog aantonen dat

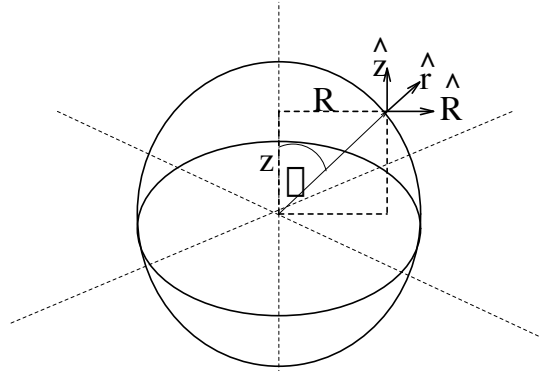
$$\lim_{r \uparrow a} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{r} = \lim_{r \downarrow a} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{r}.$$

In de schets zien we

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \cos(\theta) \hat{z} + \sin(\theta) \hat{R} \\ &= \frac{z}{r} \hat{z} + \frac{R}{r} \hat{R}\end{aligned}$$

en

$$r^2 = z^2 + R^2$$



Gebruiken we dit, dan volgt na wat algebra:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \hat{r} = \begin{cases} \frac{aI_0}{2\pi} \frac{2z}{r^4} & , \text{ voor } r > a \\ \frac{aI_0}{2\pi} \frac{2z}{a^3 r} & , \text{ voor } r < a, \end{cases}$$

en hiervoor zijn onder- en bovenlimiet duidelijk gelijk.

3. a) triviaal.
b) triviaal.

4. a) $(A_x \frac{d}{dx} + A_y \frac{d}{dy} + A_z \frac{d}{dz}) \vec{B}$
 b) 0.

5. a) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$.
 b) $(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$.

6. In complexe notatie:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= \frac{A_1}{2i} (\exp(i(kx - \omega t)) - \exp(-i(kx - \omega t))) + \\ &\quad \frac{A_2}{2i} (\exp(i(kx - \omega t + \delta)) - \exp(-i(kx - \omega t + \delta))) \\ &= \frac{1}{2i} (\exp(i(kx - \omega t))(A_1 + A_2 \exp(i\delta)) - \exp(-i(kx - \omega t))(A_1 + A_2 \exp(-i\delta))) \end{aligned}$$

Definieer nu α zodanig dat $\tan(\alpha) = A_2 \sin(\delta) / (A_1 + A_2 \cos(\delta))$. Verder is de lengte van $A_1 + A_2 \exp(i\delta)$ gegeven door $L = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos(\delta))^2 + A_2^2 \sin^2(\delta)} = \sqrt{A_1^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta) + A_2^2}$. Dus het totaal levert

$$f_1 + f_2 = \sin(kx - \omega t + \alpha) \sqrt{A_1^2 + 2A_1 A_2 \cos(\delta) + A_2^2}$$

7. b) Door gebruik te maken van de Maxwell vergelijkingen in integrale vorm kunnen we deze som oplossen. Voor de ladingsverdeling nemen een we schilletje van straal R en dikte δR tussen deze platen. Verder nemen we een identiek schilletje buiten de twee platen. Indien we de buitenranden met elkaar verbinden en ook de binnenranden, kunnen we de eerste Maxwell vergelijking gebruiken; De ladingsdichtheid per oppervlak wordt dan gegeven door:

$$\frac{\sigma(R, t) 2\pi R \delta R}{\epsilon_0} = \pm E(0) J_0 \left(\frac{\omega R}{c} \right) \cos(\omega t) 2\pi R \delta R$$

of voor de beide oppervlakken geldt

$$\sigma(R, t) = \pm \epsilon_0 E(0) J_0 \left(\frac{\omega R}{c} \right) \cos(\omega t)$$

De stroomdichtheid wordt bepaald door een "raampje" te maken langs de $\hat{\phi}$ richting wederom door een van de oppervlakken; Maxwell IV geeft dan

$$\vec{j}(R, t) = \pm \frac{E(0)}{\mu_0 c} J_1 \left(\frac{\omega R}{c} \right) \sin(\omega t) \hat{R}$$

Uitwerking van de opgaven bij werkcollege 3

1. Een elektrostatisch veld is rotatievrij (2^e Maxwell-vergelijking met $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$).

Berekenen we $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ voor beide velden, dan blijkt dat

a) $\nabla \times \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$, terwijl

b) $\nabla \times \mathbf{E}_b(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}$.

\Rightarrow veld a. kan onmogelijk een elektrostatisch veld zijn.

De potentiaal volgt uit:

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_{\text{ref}}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' .$$

We zijn vrij om het pad te kiezen, en nemen dus voor het gemak

$$(0, 0, 0) \rightarrow (x, 0, 0) \rightarrow (x, y, 0) \rightarrow (x, y, z) ,$$

zodat

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= - \int_0^x E_x(x', 0, 0) dx' - \int_0^y E_y(x, y', 0) dy' - \int_0^z E_z(x, y, z') dz' \\ &= -c_2(xy^2 + yz^2) . \end{aligned}$$

Controleren:

$$-\nabla\Phi(x, y, z) = c_2(y^2, 2xy + z^2, 2yz) .$$

2. Met de wet van Gauss in integrale vorm vinden we:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{voor } r > a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{a^3} \hat{r} & \text{voor } r < a \end{cases}$$

Om de potentiaal te berekenen kiezen we het pad radiaal. Zo vinden we

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= - \int_{\infty}^r E_r(r') dr' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \text{ voor } r > a\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= - \int_{\infty}^r E_r(r') dr' \\ &= \left(- \int_{\infty}^a - \int_a^r \right) E_r(r') dr' \\ &= \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}, \text{ voor } r < a.\end{aligned}$$

3. Denk een cilinder om de draad en gebruik weer Gauss.

We vinden zo

$$\mathbf{E}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{R},$$

en daarmee

$$\begin{aligned}\Phi(R) &= - \int_{R_{\text{ref}}}^R E_R(R') dR' \\ &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{R}{R_{\text{ref}}}\right).\end{aligned}$$

We kunnen voor R_{ref} dus alles behalve 0 of ∞ kiezen.

4. a) De elektrostatische potentiaal rond een puntlading Q is:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r},$$

maar dan is

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (-1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

b) Combineren we de Poissonvergelijking

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

met een ladingsdichtheid $\rho(\mathbf{r}) = Q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ en de potentiaal van een puntlading in \mathbf{r}_0 , $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$, dan volgt

$$\Delta\frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = -\frac{Q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{\epsilon_0}$$

en dus

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

5. De potentiaal voldoet aan de Laplace vergelijking:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(x, y) = 0.$$

Proberen we nu een oplossing van de vorm $\Phi(x, y) = f(x^2 - y^2) \equiv f(\zeta)$, dan volgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\zeta) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\zeta) \\ &= 4(x^2 + y^2)\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}f(\zeta), \end{aligned}$$

en dus dat $f(\zeta) = c_1\zeta + c_2$.

Met de randvoorwaarden volgt dan

$$\Phi(x, y) = -\frac{V}{2a^2}(x^2 - y^2)$$

en daarmee

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y) &= -\nabla\Phi(x, y) \\ &= \frac{V}{a^2}(x, -y, 0). \end{aligned}$$

Uitwerking van de opgaven bij werkcollege 4

1. Omdat $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$, weten we dat de \mathbf{A} -lijnen gesloten zijn, en vanwege symmetrie concentrische cirkels om de as van de solenoïde.

Gebruiken we nu

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

met S_C een door het contour C opgespannen oppervlak, dan vinden we met $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(R) \hat{\phi}$:

$$\begin{cases} 2\pi R A(R) = \pi a^2 B_0 & , \text{ voor } R > a \\ 2\pi R A(R) = \pi R^2 B_0 & , \text{ voor } R < a \end{cases}$$

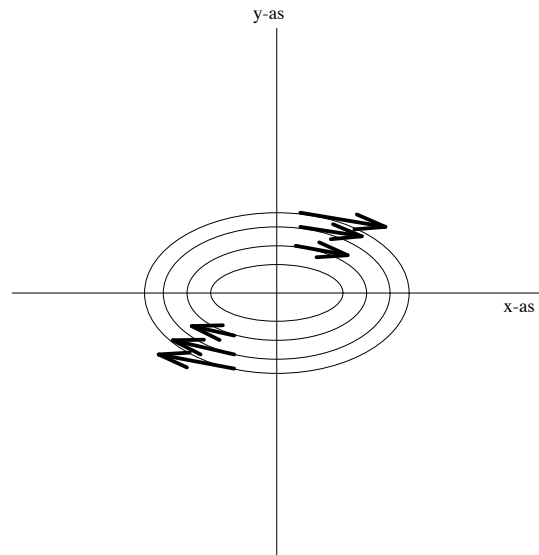
en dus

$$\begin{cases} A(R) = B_0 a^2 / (2R) & , \text{ voor } R > a \\ A(R) = B_0 R / 2 & , \text{ voor } R < a. \end{cases}$$

2. a) $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ en

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a - b \end{pmatrix}$$

b) Lijnen van constante $|\mathbf{A}|^2$ zijn ellipsen, want $|\mathbf{A}|^2 = b^2 x^2 + a^2 y^2$. Hiernaast zijn deze lijnen geschetst (voor $|b| > |a|$), alsmede het verloop van \mathbf{A} .



c) Stel $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \alpha y \hat{x} - \beta x \hat{y}$, met te bepalen α en β . Omdat we willen dat de lijnen van constante $|\mathbf{A}'|^2$ cirkels zijn, moet ten eerste gelden dat

$$\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \text{constant}$$

de vergelijking van een cirkel is; er moet dus gelden dat

$$\alpha^2 = \beta^2.$$

Natuurlijk moeten we nog wel hetzelfde \mathbf{B} -veld hebben, dus omdat nu

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha - \beta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

worden α en β bepaald uit

$$\begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 \\ \alpha + \beta = a + b \end{cases}.$$

De enige niet-triviale oplossing is $\alpha = \beta = (a + b)/2$, zodat

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \frac{a + b}{2} (y \hat{x} - x \hat{y}).$$

(Merk op dat de *ijktransformatie* van \mathbf{A} naar \mathbf{A}' gegeven wordt door $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$, met in dit geval $\chi = \frac{1}{2}(b - a)xy$).

3. We moeten nagaan dat hier nog steeds geldt $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.
Gebruiken we nu de eerder afgeleide relatie

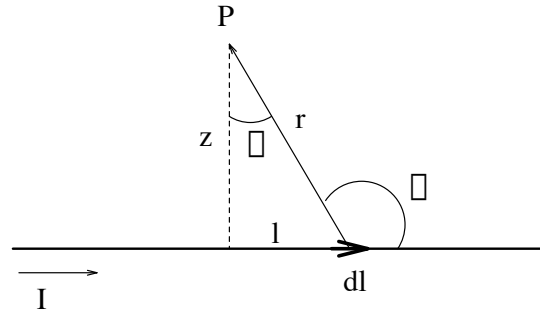
$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}),$$

dan vinden we inderdaad

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) &= -\frac{1}{2} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{r})] \\ &= -\frac{1}{2} [\mathbf{B} - \mathbf{0} + \mathbf{0} - 3\mathbf{B}] \\ &= \mathbf{B}. \end{aligned}$$

4. Griffiths, blz.209.

a) Hiernaast is de situatie geschetst. We berekenen het magneetveld op een afstand z van een stroomvoerende draad.



De wet van Biot-Savart is:

$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

In de tekening wijst $d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}$ uit het blad en heeft grootte $dl \sin(\phi) = dl \cos(\theta)$. Ook geldt dat $l = z \tan(\theta)$, zodat

$$\begin{aligned} dl &= \frac{z}{\cos^2(\theta)} d\theta \\ \text{en} \\ \frac{z}{r} &= \cos(\theta) \\ \text{zodat} \\ \frac{1}{r^2} &= \frac{\cos^2(\theta)}{z^2}. \end{aligned}$$

Hiermee vinden we

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos^2(\theta)}{z^2} \right) \left(\frac{z}{\cos^2(\theta)} \right) \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi z} (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)). \end{aligned}$$

Hierin zijn θ_1 respectievelijk θ_2 de hoeken tussen de loodlijn uit P op de draad en de lijn uit P naar het linker-, respectievelijk rechteruiteinde van de draad.

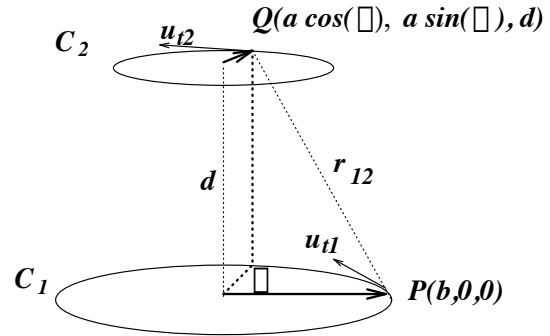
b) Wanneer $L \rightarrow \infty$ hebben we $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ en $\theta_1 \rightarrow \frac{-\pi}{2}$, zodat in die limiet

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi z}. \end{aligned}$$

5. De coëfficiënt van mutuele inductie volgt uit

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2}{r_{12}} dl_1 dl_2 .$$

De situatie is hiernaast geschetst.
 We houden eerst punt P op kring C_1 vast, en integreren over kring C_2 .



Gebruiken we

$$\begin{aligned} \hat{u}_{t1} \cdot \hat{u}_{t2} &= \cos(\phi) , \\ dl_2 &= a d\phi \\ \text{en} \\ r_{12} &= \sqrt{d^2 + a^2 \sin^2(\phi) + (b - a \cos(\phi))^2} \\ &= \sqrt{d^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi)} , \end{aligned}$$

dan is

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \int_0^{2\pi} d\phi a \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi)}} dl_1 .$$

De integraal over C_1 is nu echter direct te doen en levert $2\pi b$!
 Hiermee is dus

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0 ab}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi)}} \\ &= \mu_0 ab \int_0^\pi d\phi \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{d^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\phi)}} , \end{aligned}$$

waarmee we nu M hebben uitgedrukt in a, b en d .

Opmerking voor fijnproevers: de integraal is niet exact te berekenen, maar kan worden uitgedrukt in termen van een *hypergeometrische* functie:

$$M = \pi \mu_0 a^2 b^2 {}_2F_1 \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2, \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2 + d^2)^2} \right) .$$

Uitwerking van de opgaven bij werkcollege 5

1. a) Met $\rho(\mathbf{r}) = \sigma_0 \cos(\theta) \delta(r - a)$ en

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

vinden we dat $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$ met

$$\begin{aligned} p_z &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dr r^2 \sin(\theta) r \cos(\theta) \sigma_0 \cos(\theta) \delta(r - a) \\ &= 2\pi a^3 \sigma_0 \int_0^\pi d\theta \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ &= \left[-\frac{2}{3} \pi a^3 \sigma_0 \cos^3(\theta) \right]_0^\pi \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3 \sigma_0 \end{aligned}$$

b) Met de uitdrukking voor de potentiaal van een elektrische dipool vinden we:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= \frac{\frac{4}{3} \pi \sigma_0 a^3 \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= \frac{\sigma_0 a^3 \cos(\theta)}{3\epsilon_0 r^3}. \end{aligned}$$

2. a) We kiezen de z -as langs $\boldsymbol{\omega}$.

Met $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$ en $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ vinden we:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) \\ &= \sigma_0 \delta(r - a) \omega a \sin(\theta) \hat{\phi} \\ &= \hat{\phi} \sigma_0 \omega a \sin(\theta) \delta(r - a). \end{aligned}$$

b) Met $\hat{\phi} = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)$ en

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

hebben we

$$\mathbf{r} \times \hat{\phi} = r \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \cos(\phi) \\ -\cos(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

en dus

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^\infty dr r^2 r \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \cos(\phi) \\ -\cos(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \sigma_0 \omega a \sin(\theta) \delta(r - a) \\ &= \frac{1}{2} \omega \sigma_0 a^4 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \sin^2(\theta) \cos(\phi) \\ -\cos(\theta) \sin^2(\theta) \sin(\phi) \\ \sin^3(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \pi \omega \sigma_0 a^4 \int_0^\pi d\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin^3(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \hat{z} \frac{4}{3} \pi \omega \sigma_0 a^4 \\ \boldsymbol{\mu} &= \frac{4}{3} \pi \sigma_0 a^4 \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

c) Gebruiken we de uitdrukking voor \mathbf{A}_{dip} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

dan volgt eenvoudig:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \hat{\phi} \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega a^4}{3} \frac{\sin(\theta)}{r^2}.$$

3 a)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= -\hat{y} A_0\omega \cos(\omega t - kx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ &= -\hat{z} kA_0 \cos(\omega t - kx)\end{aligned}$$

b) $\rho(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$, en

$$\begin{aligned}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= \hat{y} A_0 \left[\frac{k^2}{\mu_0} - \omega^2 \epsilon_0 \right] \sin(\omega t - kx).\end{aligned}$$

We zien dus dat $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ en dat $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ identiek gelijk aan nul is als en slechts als

$$\frac{k^2}{\mu_0} - \omega^2 \epsilon_0 \equiv 0,$$

m.a.w. als voor de *dispersie* geldt: $\omega_k = \pm ck$, met $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ de lichtsnelheid in vacuüm.

c) Gegeven is \mathbf{A}' , het resultaat van een ijktransformatie:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \\ &= \hat{y} A_0 \sin(\omega t - kx).\end{aligned}$$

Dus we zien dat $\nabla\chi(\mathbf{r}, t) = -\hat{x} A_0 \sin(\omega t - kx)$, zodat we door integratie naar x vinden dat

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\frac{A_0}{k} \cos(\omega t - kx).$$

Verder weten we dat voor een ijktransformatie van de potentialen geldt, dat $\Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$, dus vinden we:

$$\begin{aligned}\Phi'(\mathbf{r}, t) &= \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{A_0\omega}{k} \sin(\omega t - kx) - \left(+\frac{A_0}{k} \omega \sin(\omega t - kx) \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

4. De homogene golfvergelijkingen voor \mathbf{E} en \mathbf{B} zijn:

$$\Delta \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0.$$

Stellen we nu $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_x(z, t)\hat{x} + E_y(z, t)\hat{y} + E_z(z, t)\hat{z}$ dan geldt, omdat $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = 0$, dat $\partial E_z / \partial z = 0$ en dus $\mathbf{E} \perp \hat{z}$ (We mogen de constante z -component nul kiezen).

De algemene lineaire combinatie van oplossingen van de golfvergelijking, sinussen en cosinussen die in de $\pm \hat{z}$ -richting lopen, geeft ons:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & E_x^+ \cos(\omega t - kz + \phi_x^+) \hat{x} + E_x^- \cos(\omega t + kz + \phi_x^-) \hat{x} \\ & + E_y^+ \cos(\omega t - kz + \phi_y^+) \hat{y} + E_y^- \cos(\omega t + kz + \phi_y^-) \hat{y}. \end{aligned}$$

Uit $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ en $\omega = ck$ volgt dan voor \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} c\mathbf{B} = & -E_y^+ \cos(\omega t - kz + \phi_y^+) \hat{x} + E_y^- \cos(\omega t + kz + \phi_y^-) \hat{x} \\ & + E_x^+ \cos(\omega t - kz + \phi_x^+) \hat{y} - E_x^- \cos(\omega t + kz + \phi_x^-) \hat{y}, \end{aligned}$$

dus ook $\mathbf{B} \perp \hat{z}$.

Bekijken we voor het gemak alleen de $+\hat{z}$ -richting, dan kunnen we de volgende gevallen onderscheiden:

lineair gepolariseerd EM veld:

$$\phi_x^+ = \phi_y^+ + k\pi, \text{ met } k \text{ geheel.}$$

circulair gepolariseerd EM veld:

$$\begin{aligned} \phi_x^+ &= \phi_y^+ + (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \text{ met } k \text{ geheel,} \\ E_x^+ &= E_y^+. \end{aligned}$$

elliptisch gepolariseerd EM veld:

is als circulair, maar dan natuurlijk $E_x \neq E_y$.

Uitwerking van de opgaven bij werkcollege 6

1. De golfvergelijking voor een scalair veld $\psi(\mathbf{r}, t)$ (druk, temperatuur, potentiaal etc.) is:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \Delta \psi(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t).$$

Substitueren we nu als Ansatz de cilindersymmetrische functie $\psi(\mathbf{r}, t) = f(R)e^{-i\omega t}$, dan vinden we met

$$\begin{aligned} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) &= e^{-i\omega t} \frac{1}{R} \frac{d}{dR} R \frac{df(R)}{dR}, \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= \frac{\omega^2}{c^2} e^{-i\omega t} f(R), \end{aligned}$$

dat $f(R)$ ($\rho(R > 0) = 0$) aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 f(R)}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{df(R)}{dR} + \frac{\omega^2}{c^2} f(R) = 0 \quad (R > 0)$$

voldoet. De algemene oplossing van deze *Besselvergelijking* is

$$f(R) = C_1 J_0\left(\frac{\omega}{c} R\right) + C_2 Y_0\left(\frac{\omega}{c} R\right),$$

met J_0 resp. Y_0 de nulde-orde Besselfunctie van de eerste resp. tweede soort, en C_1 en C_2 (complexe) constanten.

Opmerking: omdat $Y_0(x)$ singulier is in $x = 0$, kiest men in veel problemen (bijv. de met een wisselspanning bekrachtigde cilindervormige condensator, behandeld op college) $C_2 = 0$ om zo een reguliere oplossing te hebben. In dit probleem moeten we Y_0 wel meenemen als oplossing omdat we de Besselvergelijking voor $R > 0$ bekijken.

2. Voor de potentiaal Φ geldt:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}', t_R)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \end{aligned}$$

met hier als ladingsdichtheid:

$$\rho(\mathbf{r}', t') = q \delta(x' - vt') \delta(y') \delta(z'),$$

We nemen \mathbf{r} op de x -as ($\mathbf{r} = x \hat{x}$), zodat:

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\delta(x' - vt + \frac{v}{c}|x - x'|)}{|x - x'|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\delta(x' - vt \pm \frac{v}{c}(x - x'))}{\pm(x - x')} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\delta((1 \mp \frac{v}{c})x' - vt \pm \frac{v}{c}x)}{\pm(x - x')},\end{aligned}$$

waarbij we afspreken dat we het bovenste teken nemen als $x > x'$ en het onderste teken als $x < x'$.

Vanwege de δ -distributie is er alleen een bijdrage bij

$$x' = \frac{vt \mp \frac{v}{c}x}{1 \mp \frac{v}{c}},$$

dus wanneer

$$x - x' = x - \frac{vt \mp \frac{v}{c}x}{1 \mp \frac{v}{c}}.$$

Gebruiken we verder dat $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(ax + b) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x + \frac{b}{a})$, dan is

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\pm(x(1 \mp \frac{v}{c}) - vt \pm \frac{v}{c}x)} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta\left(x' - \frac{vt \mp \frac{v}{c}x}{1 \mp \frac{v}{c}}\right) \\ &= \pm \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x(1 \mp \frac{v}{c}) - vt \pm \frac{v}{c}x)} \\ &= \pm \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x - vt},\end{aligned}$$

waar we nog steeds vasthouden aan:

$$\begin{cases} + & \text{als } x(1 \mp \frac{v}{c}) - vt \pm \frac{v}{c}x > 0, \\ - & \text{als } x(1 \mp \frac{v}{c}) - vt \pm \frac{v}{c}x < 0. \end{cases}$$

Dit laatste werkt echter uit tot

$$\begin{cases} + & \text{als } x - vt > 0, \\ - & \text{als } x - vt < 0, \end{cases}$$

zodat we uiteindelijk voor de potentiaal vinden:

$$\Phi(x, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x - vt|}.$$

Merk dus op dat in dit bijzondere geval, waarin de waarnemer zich op de lijn van eenparig rechtlijnige beweging van de lading bevindt, de schijnlading het retardatie-effect opheft.

3. a) Voor de elektrostatische energie U_E geldt:

$$U_E = \frac{1}{2} \int \rho \Phi \, d\mathbf{r}.$$

De lading bevindt zich op het boloppervlak ($r = a$) en daar geldt $\Phi = V$, dus

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{Q}{4\pi r^2} \delta(r - a) V \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \\ &= \frac{1}{2} QV \quad \left(\quad = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{met} \quad C \equiv \frac{Q}{V} \right) \end{aligned}$$

(Ga zelf na dat je met de formule $U_E = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{r}$, en die voor het \mathbf{E} -veld van een geladen bolschil, dezelfde energie vindt.)

b) Met de formule

$$U_E = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \, d\mathbf{r},$$

en die voor het \mathbf{E} -veld van een homogeen geladen bol met straal a :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r > a \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{r} & r < a \end{cases},$$

vinden we eenvoudig

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \left(\int_0^a dr r^2 \frac{r^2}{a^6} + \int_a^\infty dr r^2 \frac{1}{r^4} \right) \\ &= \frac{6}{5} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}. \end{aligned}$$

(Ga zelf na dat je met de formule $U_E = \frac{1}{2} \int \rho \Phi \, d\mathbf{r}$, en die voor de potentialen binnen en buiten een homogeen geladen bol, dezelfde energie vindt.)

4. We gebruiken de voor een ideale plaatcondensator (plaatafstand a , plaatoppervlak S , lading op de platen $\pm Q$, capaciteit C) geldende formules:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}| &= \frac{Q}{\epsilon_0 S} \\ V &= \frac{Qa}{\epsilon_0 S} \\ C &= \frac{\epsilon_0 S}{a}, \end{aligned}$$

en de elektrostatistische energie die gegeven wordt door:

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 a}{2\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} C V^2.$$

a) Constante lading:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dU_E}{da} \right|_Q &= \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \\ &= \frac{1}{2} Q |\mathbf{E}|. \end{aligned}$$

b) Constante spanning:

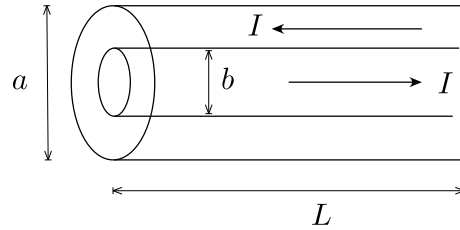
$$\begin{aligned} \left. \frac{dU_E}{da} \right|_V &= -\frac{\epsilon_0 S}{2a^2} V^2 \\ &= -\frac{1}{2} Q |\mathbf{E}|. \end{aligned}$$

In het tweede geval (constante V) moet de batterij ook arbeid leveren. Die bijdrage is precies $(-Q|\mathbf{E}|)$, dit verklaart het verschil tussen a) en b).

Uitwerking van de opgaven bij werkcollege 7

1.

De situatie is hiernaast weergegeven. De stroom I wordt aangevoerd via de binnenmantel (straal a) en via de buitenmantel (straal b) weer afgevoerd. T.g.v. de stroom is er tussen binnen- en buitenmantel een magneetveld \mathbf{B} .



a) Er geldt natuurlijk ($\mu_0 I = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi},$$

met R gemeten vanaf de as van de binnenmantel. Zo volgt voor U_m per lengte-eenheid:

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{l} \int \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} dV \\ &= \frac{2\pi}{2\mu_0} \int_a^b dR R |\mathbf{B}|^2 \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Gebruiken we $U_m = \frac{1}{2} L I^2$, dan volgt eenvoudig:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

a1) Bij constante stroomsterkte (en nog steeds per lengte-eenheid):

$$\left. \frac{dU_m}{db} \right|_I = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \frac{1}{b}.$$

a2) Bij constante flux $\Phi_B = LI$ schrijven we eerst

$$U_m = \frac{\Phi^2}{2L},$$

zodat

$$\left. \frac{dU_m}{db} \right|_{\Phi_B} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \frac{1}{b} \quad \left(= -\frac{dU_{\text{mech}}}{db} \right).$$

b) Met a2) vinden we voor de kracht per lengte-eenheid op de buitenmantel:

$$\mathbf{F}(b) = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \frac{1}{b} \hat{R},$$

en dus een (naar buiten gerichte) druk

$$\begin{aligned} p_b &= \frac{|\mathbf{F}|}{2\pi b} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi b} \right)^2 \\ &= \frac{|\mathbf{B}(b)|^2}{2\mu_0}. \end{aligned}$$

Geheel analoog vinden we voor de kracht per lengte-eenheid op de binnenmantel:

$$\mathbf{F}(a) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \frac{1}{a} \hat{R},$$

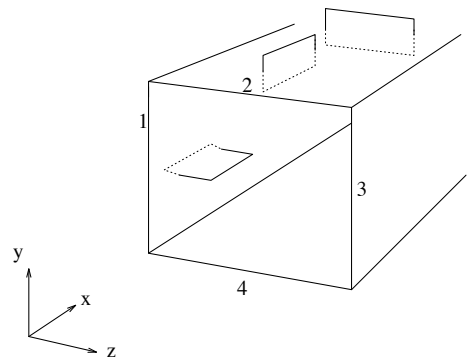
en dus een (naar binnen gerichte) druk

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{|\mathbf{F}|}{2\pi a} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \right)^2 \\ &= \frac{|\mathbf{B}(a)|^2}{2\mu_0}. \end{aligned}$$

De druk is dus gelijk aan de veld-energiedichtheid ter plaatse.

2.

a) De golfpijp is hiernaast getekend. We berekenen de stroomverdelingen in de wanden (1 t/m 4), door op de aangegeven lussen de vierde Maxwellvergelijking, in integrale vorm, toe te passen:



$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{S_C} \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}.$$

De velden zijn gegeven door:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_a \sin\left(\frac{\pi z}{b}\right) \cos(\omega t - kx) \hat{y} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\pi E_a}{\omega b} \cos\left(\frac{\pi z}{b}\right) \sin(\omega t - kx) \hat{x} + \frac{k E_a}{\omega} \sin\left(\frac{\pi z}{b}\right) \cos(\omega t - kx) \hat{z}.\end{aligned}$$

Berekenen we eerst de ladingsverdelingen m.b.v. $\sigma(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}_\perp$, dan vinden we

$$\begin{aligned}\text{wanden 1 en 3} &: \sigma = 0 \\ \text{wanden 2(-) en 4(+)} &: \sigma(x, z, t) = \mp \epsilon_0 E_a \sin\left(\frac{\pi z}{b}\right) \cos(\omega t - kx)\end{aligned}$$

Tenslotte de stroomverdelingen.

Omdat we in gedachten de breedte van een lus naar nul laten naderen zien we, dat de $\partial \mathbf{E} / \partial t$ -term uit de vierde Maxwellvergelijking niet zal bijdragen.

(M.a.w: hoewel we hier een niet-statisch probleem hebben, mogen we toch de wet van Ampère gebruiken).

Dit geeft dan de volgende resultaten:

$$\text{in vlak 1(+)} \text{ en } 3(-) : \quad I_x = 0, \quad I_y = \pm \frac{\pi E_a}{\mu_0 \omega b} \sin(\omega t - kx)$$

$$\text{in vlak 2 (+)} \text{ en } 4 (-) : \quad I_z = \pm \frac{\pi E_a}{\mu_0 \omega b} \cos\left(\frac{\pi z}{b}\right) \sin(\omega t - kx) \quad I_x = \mp \frac{k E_a}{\mu_0 \omega} \sin\left(\frac{\pi z}{b}\right) \cos(\omega t - kx)$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_u &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} \\ &= -\frac{\pi E_a^2}{4\mu_0 b \omega} \sin\left(\frac{2\pi z}{b}\right) \sin(2(\omega t - kx)) \hat{z} + \frac{k E_a^2}{\mu_0 \omega} \sin^2\left(\frac{\pi z}{b}\right) \cos^2(\omega t - kx) \hat{x}\end{aligned}$$

en dus is het tijdsgemiddelde van j_u over de doorsnede:

$$\begin{aligned}\langle j_u \rangle &= \frac{1}{abT} \int_0^T dt \int_0^a \int_0^b j_{u,x} dy dz \\ &= \frac{k E_a^2}{4\mu_0 \omega}\end{aligned}$$

(Het getransporteerde vermogen is $P = ab j_u$.)

De tijdgemiddelde totale veld-energie-dichtheid wordt gegeven door

$$\begin{aligned}\langle u \rangle &= \frac{1}{abT} \int_0^T dt \int_0^a dy \int_0^b dz \left[\frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right] \\ &= \frac{E_a^2}{4\mu_0\omega^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\pi^2}{b^2} + k^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{E_a^2}{\mu_0 c^2},\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap de dispersierelatie hebben gebruikt.

We hebben nu de relatie

$$\langle j_u \rangle = \langle u \rangle \frac{c^2 k}{\omega}.$$

Is $c^2 k/\omega$ de groepsnelheid? Welnu:

$$\begin{aligned}v_g &= \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{d}{d\omega} \left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{b^2}} \right] \right)^{-1} \\ &= \frac{c^2 k}{\omega}.\end{aligned}$$

dus hebben we aangetoond dat het energietransport met de groepsnelheid plaatsvindt.

3. a) We proberen als oplossingen ($a < R < b$)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(R) \cos(kz - \omega t) \hat{R} \quad \text{en} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = B(R) \cos(kz - \omega t) \hat{\phi}.$$

(Hiermee is aan de randvoorwaarden $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$ en $\mathbf{B}_{\perp} = 0$ voldaan.)

Allereerst moet gelden dat $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, dus

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R E(R)) = 0$$

\implies

$$E(R) = \frac{E_1}{R}.$$

Aan de eis $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ is met de gekozen vorm van \mathbf{B} al voldaan.

Verder volgt:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & : -kE(R) \sin(kz - \omega t) = -\omega B(R) \sin(kz - \omega t) \Rightarrow B(R) = \frac{k}{\omega} E(R) \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} & : kB(R) \sin(kz - \omega t) = \frac{\omega}{c^2} E(R) \sin(kz - \omega t) \Rightarrow B(R) = \frac{\omega}{kc^2} E(R) \end{aligned} \right\}$$

Het laatste stelsel geeft dus als oplossing:

$$E(R) = cB(R) \quad \text{en} \quad \omega = ck$$

b)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \quad v_f = \frac{\omega}{k} = c \quad \text{geen cutoff-frequentie}$$

c) Lading per lengte-eenheid:

$$\lambda(z, t) = \pm 2\pi\epsilon_0 E_1 \cos(kz - \omega t) \quad (\text{binnenmantel } +, \text{ buitenmantel } -)$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\mu_0} 2\pi a B(a) \cos(kz - \omega t) \\ &= c 2\pi\epsilon_0 E_1 \cos(kz - \omega t) \\ &= c \lambda \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} V(a) - V(b) &= \int_a^b E(R) \cos(kz - \omega t) dR \\ &= E_1 \log\left(\frac{b}{a}\right) \cos(kz - \omega t) \end{aligned}$$

en tenslotte

$$C_0 = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(b/a)} \quad Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{1}{cC_0} = \frac{\log(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c}.$$

Uitwerking van de opgaven bij werkcollege 8

1. a) De Maxwell stress-tensor is (*Griffiths, blz.326 e.v.*):

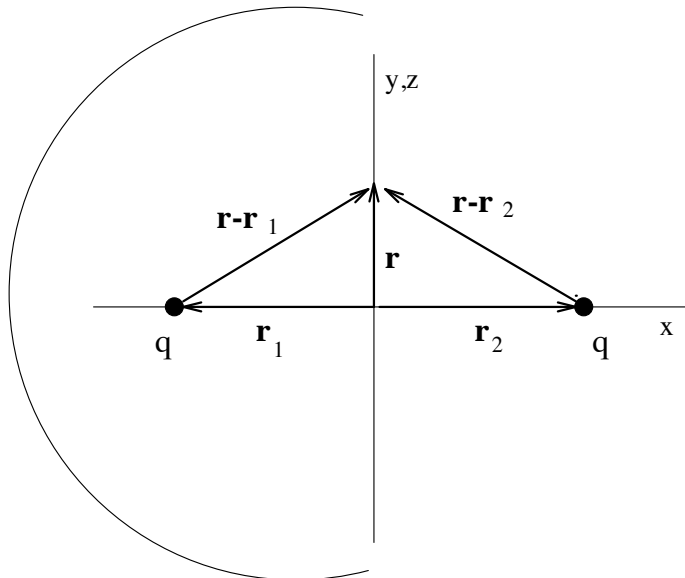
$$\frac{1}{\epsilon_0} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \mathbf{E}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \overleftrightarrow{\mathbf{1}} .$$

De kracht op ladingen binnen een volume V wordt hiermee gegeven door:

$$\mathbf{F} = \oint_{S_V} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{S} - \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{E} \times \mathbf{B} dV ,$$

met S_V een oppervlak dat V omsluit.

We gaan uit van nevenstaande situatie, waar we integreren over het middelloodvlak ($x = 0$). We sluiten het oppervlak met een oneindige half-bol, maar merken direct op dat de oppervlakte integraal daarover nul zal zijn, omdat de veldsterkten in het oneindige verdwijnen.



Omdat het hier een statische ladingsverdeling betreft, is \mathbf{B} nul. Verder ziet men direct dat de kracht op lading 1 in de x -richting is, zodat voor de de kracht op lading 1 geldt:

$$(\mathbf{F}_{\text{op } 1}) = \hat{x} \int T_{xx} dy dz = -(\mathbf{F}_{\text{op } 2}) .$$

De stress-tensor is hier ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$):

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathbf{T}} = & \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left[\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right) \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right) - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right) \right] . \end{aligned}$$

Omdat we over het middelloodvlak integreren geldt verder:

$$\begin{cases} x - x_1 = -(x - x_2) = \frac{d}{2}, \\ y - y_1 = y - y_2 = y, \\ z - z_1 = z - z_2 = z, \end{cases}$$

zodat $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2}$.

Uiteindelijk vinden we dus dat:

$$T_{xx} = -\frac{q^2}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{y^2 + z^2}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^3}.$$

Om de integratie van T_{xx} uit te voeren gaan we over op cilindercoördinaten (R, ϕ) in het yz -vlak, $dy dz = 2\pi R dR$, $y^2 + z^2 = R^2$, zodat

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} \text{ op } 1) &= \hat{x} 2\pi \int T_{xx} R dR \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dR \frac{R^3}{(R^2 + d^2/4)^3} \hat{x} \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \hat{x}. \end{aligned}$$

b) Voor het geval van twee tegengestelde ladingen geldt allereerst, dat

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right).$$

Hiermee wordt T_{xx} :

$$T_{xx} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{d^2}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^3},$$

en uiteindelijk

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} \text{ op } 1) &= \hat{x} 2\pi \int T_{xx} R dR \\ &= \frac{q^2 d^2}{16\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dR \frac{R}{(R^2 + d^2/4)^3} \hat{x} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \hat{x}. \end{aligned}$$

2. Ten opzichte van de stilstaande waarnemer heeft de staaf lengte L , en maakt de staaf een hoek α met de bewegingsrichting. Toepassen van de formules voor Lorentzcontractie geeft:

$$L_x = L \cos(\alpha) = \frac{1}{\gamma} L_{0,x}$$

$$L_y = L \sin(\alpha) = L_{0,y},$$

waarin L_0 de rustlengte van de staaf is.

Hiermee volgt dan

$$\begin{aligned} L_0^2 &= L_{0,x}^2 + L_{0,y}^2 \\ &= \gamma^2 L^2 \cos^2(\alpha) + L^2 \sin^2(\alpha) \\ &= \cos^2(\alpha) (\gamma^2 + \tan^2(\alpha)) L^2 \end{aligned}$$

$$L_0^2 = \frac{\gamma^2 + \tan^2(\alpha)}{1 + \tan^2(\alpha)} L^2.$$

Voor de “rusthoek” α_0 vinden we

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_0) &= \frac{L_{0,y}}{L_{0,x}} \\ &= \frac{1}{\gamma} \frac{L_y}{L_x} \\ &= \frac{1}{\gamma} \tan(\alpha). \end{aligned}$$

3. a) $(c\rho, \mathbf{j})$ is een viervektor. We transformeren nu van het stelsel waarin de draad in rust is (het lab), naar een stelsel waarin de elektronen in rust zijn. Dit laatste stelsel heeft een snelheid $v \hat{x}$ t.o.v. het labstelsel.

Omdat in het labstelsel $\rho = 0$ (de draad is neutraal) en $\mathbf{j} = -\frac{I}{A} \hat{x}$ (A de draaddoorsnede, minteken t.g.v. definitie stroomsterkte), wordt de transformatie:

$$\begin{pmatrix} c\rho' \\ j'_{x'} \\ j'_{y'} \\ j'_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -I/A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dus

$$\rho' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{I v}{A c} \qquad j'_{x'} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{I}{A}$$

c) De doorsnede A van de draad is invariant (\perp op bewegingsrichting) , dus $\vec{l}' = A\vec{j}'$ en $\lambda' = A\rho'$.

4. De relativistische-bewegingsvergelijking is

$$F = \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Omdat F constant is en $v(t = 0) = 0$, kunnen we direct integreren:

$$Ft = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

zodat de snelheid gegeven wordt door

$$v(t) = c \frac{\left(\frac{Ft}{mc}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}.$$

Hiermee vinden we voor de baan

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t dt' v(t') \\ &= c \int_0^t dt' \frac{\left(\frac{Ft'}{mc}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft'}{mc}\right)^2}} \\ &= \frac{mc^2}{F} \int_0^{\frac{Ft}{mc}} du \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \\ &= \frac{mc^2}{F} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

(Merk op dat we dit kunnen schrijven als

$$\left(\frac{F}{mc^2}x(t) + 1\right)^2 - \left(\frac{F}{mc^2}ct\right)^2 = 1.$$

De baan is dus een tak van een hyperbool, en daarom wordt deze beweging in de literatuur *hyperbolische beweging* genoemd.)

Uitwerking van de opgaven bij werkcollege 9

1. We moeten laten zien dat de eerste Maxwell-vergelijking (M1)

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$$

consistent is met M1' :

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') = \frac{\rho'(\mathbf{r}', t')}{\epsilon_0}$$

We gebruiken daarvoor de transformatie formules :

$$\frac{d}{dx'} = \gamma \left(\frac{d}{dx} + \frac{v}{c^2} \frac{d}{dt} \right), \quad \frac{d}{dy'} = \frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dz'} = \frac{d}{dz},$$

$$E'_{x'} = E_x, \quad E'_{y'} = \gamma(E_y - vB_z), \quad E'_{z'} = \gamma(E_z + vB_y),$$

$$\text{en} \quad \rho' = \gamma \left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x \right).$$

$$(\beta \equiv v/c, \gamma^2 \equiv (1 - \beta^2)^{-1}).$$

Substitueren we deze in M1' dan vinden we:

$$\gamma \left(\frac{d}{dx} + \frac{v}{c^2} \frac{d}{dt} \right) E_x + \gamma \frac{d}{dy} (E_y - vB_z) + \gamma \frac{d}{dz} (E_z + vB_y) = \frac{\gamma}{\epsilon_0} \left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x \right),$$

hetgeen herleid kan worden tot

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} &= v \left[\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right]_x \\ &= 0, \text{ volgens M4.} \end{aligned}$$

Conclusie: indien de Maxwellvergelijkingen gelden in stelsel S , dan geldt de eerste Maxwellvergelijking ook in stelsel S' .

2. Gegeven twee vier-vektoren $(a_\mu) = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ en $(b_\mu) = (b_0, b_1, b_2, b_3)$.

Te bewijzen dat het inproduct $a \cdot b = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$ invariant is onder Lorentztransformaties. Bewijs :

$$\begin{aligned} a' \cdot b' &= \gamma^2 (a_0 - \beta a_1)(b_0 - \beta b_1) - \gamma^2 (a_1 - \beta a_0)(b_1 - \beta b_0) - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) [a_0 b_0 - a_1 b_1] - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ &= a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \text{ omdat } \gamma^2 (1 - \beta^2) \equiv 1 \\ &= a \cdot b. \end{aligned}$$

3. a)

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -A_0\omega \cos(\omega t - kx) \hat{y}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -A_0k \cos(\omega t - kz) \hat{z}.$$

b) $(\Phi/c, \mathbf{A})$ is een vier-vektor:

$$\frac{\Phi'}{c} = \gamma \left(\frac{\Phi}{c} - \beta A_x \right) = 0$$

$$A'_{x'} = \gamma \left(A_x - \beta \frac{\Phi}{c} \right) = 0$$

$$A'_{y'} = A_y \stackrel{\omega=ck}{=} A_0 \sin(k(ct - x))$$

$$A'_{z'} = A_z = 0$$

Nu willen we t en x nog transformeren naar t' en x' , m.b.v. de (inverse, dus plusteken!) transformatie

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'), \quad x = \gamma(x' + \beta ct') \implies$$

$$\begin{aligned} A'_{y'} &= A_0 \sin(\gamma k(1 - \beta)(ct' - x')) \\ &= A_0 \sin(\omega' t' - k' x'), \end{aligned}$$

$$\text{waarin } \frac{\omega'}{c} \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k \right), \quad k' = \gamma \left(k - \beta \frac{\omega}{c} \right).$$

Merk op dat het er op lijkt dat $(\omega/c, \mathbf{k})$ een vier-vektor is. Zie onderdeel d).

De veldsterkten in S' volgen nu eenvoudig:

$$\mathbf{E}' = -\nabla'\Phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t'} = -A_0\omega' \cos(\omega' t' - k' x') \hat{y}',$$

$$\mathbf{B}' = \nabla' \times \mathbf{A}' = -A_0k' \cos(\omega' t' - k' x') \hat{z}'.$$

c)

$$\frac{\Phi''}{c} = \gamma \left(\frac{\Phi}{c} - \beta A_y \right) = -\gamma\beta A_0 \sin(\omega t - kx),$$

$$A''_{x''} = A_x = 0 \quad A''_{z''} = A_z = 0,$$

$$A''_{y''} = \gamma \left(A_y - \beta \frac{\Phi}{c} \right) = \gamma A_0 \sin(\omega t - kx).$$

Nu de coördinaten nog:

$$\begin{aligned}x &= x'' \\ ct &= \gamma(ct'' + \beta y'')\end{aligned}$$

dus

$$\omega t - kx = \omega \gamma t'' + k \gamma \beta y'' - kx''.$$

Definiëren we verder nog $\omega'' = \gamma\omega$, $k''_{x''} = k$ en $k''_{y''} = -k\gamma\beta$, dan hebben we

$$\frac{\Phi''}{c} = \gamma \left(\frac{\Phi}{c} - \beta A_y \right) = -\gamma \beta A_0 \sin(\omega'' t'' - k''_{x''} x'' - k''_{y''} y''),$$

en

$$A''_{y''} = \gamma \left(A_y - \beta \frac{\Phi}{c} \right) = \gamma A_0 \sin(\omega'' t'' - k''_{x''} x'' - k''_{y''} y'').$$

d) Voor het geval in b) zijn we dit al nagegaan.

Voor het geval c) (met dus $k_x = k$ en $k_y = 0$) klopt het ook, want de Lorentz-transformatie toegepast op de vermeende vier-vektor geeft:

$$\frac{\omega''}{c} = \gamma \left(\frac{\omega}{c} - \beta k_y \right) = \gamma \frac{\omega}{c},$$

en

$$k''_{y''} = \gamma \left(k_y - \beta \frac{\omega}{c} \right) = -\gamma \beta \frac{\omega}{c} = -\gamma \beta k.$$